UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: HISTÓRIA DA FILOSOFIA MODERNA E CONTEMPORÂNEA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A IDEALIDADE DO ESPAÇO: RELAÇÃO ENTRE FILOSOFIA E GEOMETRIA NA CRÍTICA DA RAZÃO PURA DE IMMANUEL KANT

FLAVIA PEREIRA

CURITIBA
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: HISTÓRIA DA FILOSOFIA MODERNA E CONTEMPORÂNEA

FLAVIA PEREIRA

A IDEALIDADE DO ESPAÇO: RELAÇÃO ENTRE FILOSOFIA E GEOMETRIA NA CRÍTICA DA RAZÃO PURA DE IMMANUEL KANT.

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre do Curso de Mestrado em Filosofia do Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra.

CURITIBA
2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: HISTÓRIA DA FILOSOFIA MODERNA E CONTEMPORÂNEA

Por decisão do Colegiado do Programa o aluno deverá atender as solicitações da banca, quando houver, e anexar este ao final da dissertação como versão definitiva aprovada pelo orientador, que neste momento estará representando a Banca Examinadora.

Curitiba, 25 de junho de 2013

Prof. Doutor Eduardo Barra Assinatura: Barra

FLÁVIA PEREIRA

A IDEALIDADE DO ESPAÇO: RELAÇÃO ENTRE FILSOFIA E GEOMETRIA NA CRÍTICA DA RAZÃO PURA DE IMMANUEL KANT.

CURITIBA
2013

Aos meus pais Evaldo e Anita.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador por sua dedicação ao meu trabalho e principalmente por me mostrar que orientar é muito mais do que apontar erros e acertos, é mostrar caminhos e apoiar os passos errantes do orientado. Que orientar é permanecer atento para interferir na medida certa sem invadir ou abandonar. É mostrar possibilidades, permitir e respeitar escolhas.

Aos grandes amigos Aline da Silva Dias e Luiz Francisco Garcia Lavanholli pela companhia e apoio incondicional. Por terem me mostrado que a amizade é algo simples, mas que pode ser determinante na escolha entre desistir ou permanecer buscando.

À Coordenação do Programa de Pós-graduação em História da Filosofia da Universidade Federal do Paraná pelo apoio e paciência.

Ao programa de apoio à pesquisa – REUNI pelo apoio financeiro.

Se os senhores assistem a uma partida de xadrez, para compreender a partida, não lhes bastará saber as regras da marcha das pedras. Isso lhes permitiria apenas reconhecer que cada lance foi jogado em conformidade com aquelas regras, e essa vantagem realmente teria bem pouco valor. Entretanto, isso é o que faria o leitor de um livro de matemática, se ele fosse apenas lógico. Compreender a partida é algo inteiramente diferente; é saber por que o jogador avança determinada peça ao invés de outra, que poderia ter movido sem violar as regras do jogo. É perceber a razão íntima que faz dessa série de lances sucessivos uma espécie de todo organizado. A fortiori, essa faculdade é necessária ao próprio jogador, isto é, ao ***inventor****.*

Henri Poincaré

O valor da ciência.

RESUMO

Na presente dissertação pretendemos apresentar uma interpretação possível para a relação entre dois pontos centrais da filosofia kantiana, a saber, a doutrina da idealidade do espaço e a filosofia da matemática kantiana. Nossa intenção é delimitar os limites e as possibilidades dessa relação para que a doutrina do espaço kantiana possa ser compreendida como significativa no interior do projeto crítico e, ainda assim, preserve os nexos de coerência e relevância com as questões matemáticas do seu tempo. Para alcançar nosso objetivo trataremos de apresentar a concepção kantiana de matemática, partindo de sua caracterização do método matemático contraposto ao método filosófico. O método matemático apresentado por Kant possui características peculiares; ele requer uma construção que corresponda ao conceito e que, por meio de uma intuição a priori, o antecipe como esquema. Para melhor compreender o que Kant determinar como sendo o processo de construção na intuição pura recorreremos a exemplos retirados do cânone do conhecimento matemático da época, qual seja, os *Elementos* de Euclides. Estabelecer o paralelo entre a construção com régua e compasso encontrada na axiomatização euclidiana, bem como a importância que os diagramas possuem nesse tipo de axiomatização, revelará a importância que Kant atribui à construção, e principalmente, nos ajudará a compreender a natureza desse processo – ou *prática* – de construção de um conceito na intuição pura. De posse dessa compreensão, poderemos retornar às bases da formulação kantiana de sua doutrina do espaço a fim de identificar as semelhanças entre esse processo necessário à prática matemática e aquele necessário para a representação dos fenômenos como externos ao sujeito. Veremos também que a necessidade estabelecida não pode ser uma necessidade lógica, mas sim uma necessidade transcendental. É da atividade matemática como prática que surge a exigência de que a representação do espaço seja uma intuição e não um conceito e, por sua vez, é essa última exigência que torna inevitável à conclusão de que o espaço *per se* deve ser transcendentalmente ideal.

Palavras-chave: doutrina do espaço, filosofia da matemática, geometria, intuição pura.

ABSTRACT

In this thesis we intend to present a possible interpretation for the relationship between two central points of the Kantian philosophy, namely, the doctrine of the ideality of space and Kantian philosophy of mathematics. Our intention is to define the limits and possibilities of this relationship in order to the understanding the significance of Kantian doctrine of space within the critical project and still preserving their coherence and relevance with the mathematical questions of his time. In order to achieve our goal we will try to introduce Kantian conception of mathematics by her characterization of the mathematical method contrasted with the philosophical method. The mathematical method presented by Kant has peculiar features, it requires a construction which corresponding to the concept and, through an intuition a priori, anticipating it as the schema. To better understand what Kant considers to be the construction process in pure intuition will draw on examples from the canon of mathematical knowledge of the time, namely Euclid's Elements. To setting the parallel between the construction with ruler and compass found in Euclidean axiomatization, and the importance that the diagrams have for this kind of axiomatization, will reveal the importance that Kant assigns to the construction, and mainly, helps us understand the nature of this process - or practice - of construction of a concept in pure intuition. With this understanding, we can return to the backgrounds of the significance of Kantian formulation of his doctrine of space in order to identify the similarities between this process necessary to practice and that necessary for the representation of phenomena as external to the subject. We will also see that the established need not be a logical necessity, but a necessity transcendental. It is the mathematical activity as a practice that appears to demand that the representation of space to be an intuition, not a concept, and in turn, it is this last requirement that makes inevitable the conclusion that the space per se should be transcendentally ideal

Keywords: space doctrine, philosophy of mathematics, geometry, pure intuition.

Introdução

Ao longo de nossa investigação sobre a filosofia da matemática de Kant pudemos perceber duas posições bem definidas entre a vasta gama de interpretações sobre o tema, aquelas que a consideram ultrapassada sob o ponto de vista da sua permanência no contexto da ciência contemporânea e aquelas que a consideram uma importante contribuição não só para a filosofia, mas para a ciência natural enquanto tal, embora limitada ao seu tempo. À primeira vista, adotar essa última condição na análise de uma teoria do passado pode parecer óbvia, mas queremos sublinhar a importância dessa divisão visto que ela determina a forma como os comentadores têm abordado a filosofia kantiana da matemática. Entre os primeiros, podemos destacar os neo-positivistas, segundo os quais, e tendo Carnap como porta-voz, a teoria kantiana da matemática, principalmente no tocante a geometria, deve ser abandonada. Na introdução à edição inglesa do livro *The Philosophy of space and time* de Reichenbach, Carnap argumenta em favor da sua prescrição do abandono da teoria kantiana. Para Carnap, os resultados da teoria kantiana são compreensíveis devido às características dos princípios da geometria, que no caso em questão são assimilados aos axiomas da geometria euclidiana. Esses axiomas possuem uma dupla característica que, de outra forma, são dificilmente conciliáveis. Veremos que os problemas gerados por essas características compuseram o que no séc. XVII os filósofos chamaram de *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*. É justamente neste século em que acontece uma revolução na matemática, anterior é claro àquela surgida no que chamamos hoje “a crise nos fundamentos”. Jairo José da Silva (2007) nos mostra que neste século novas ciências surgiram, como a álgebra, enquanto a geometria e a aritmética, na condição de disciplinas tradicionais, haviam se desenvolvido consideravelmente. Mas, do ponto de vista filosófico, são justamente a autonomia do simbolismo matemático e as novas concepções de número nascidas no domínio da álgebra, além da disposição dos matemáticos em tratar do problema do infinito sob diversas formas, as questões mais revolucionárias relativas à matemática. Da Silva deixa claro que Kant ignora algumas delas e isso o põe numa situação de incompatibilidade com a prática matemática do século dezessete, o que o torna alheio a algumas transformações na matemática. Ele não só limita a prática matemática em prol de sua filosofia como não traz nenhuma contribuição para a matemática. Essa posição de Da Silva é compartilhada também por Mancosu (1996).

Mas voltemos aos argumentos carnapianos em defesa do abandono da filosofia da matemática kantiana. Carnap afirma que se, por um lado, os axiomas da geometria euclidiana são imediatamente evidentes e assim sustentados com necessidade, por outro, sua validade não é puramente lógica, mas factual. O que, em termos mais técnicos, significa que os axiomas não são analíticos, mas sintéticos. Assim, por exemplo, da medida dos ângulos e comprimentos de corpos físicos, o resultado de outras medidas podem ser predicadas. Kant, em sua teoria da matemática, aceitou e garantiu a conciliação dessas características. Segundo Carnap, um novo problema surge com o advento das geometrias não euclidianas. Qual seria então o método para determinar qual sistema, euclidiano ou não euclidiano, descreveria o mundo físico? Essa questão não é um problema posto para Kant e sua teoria da geometria, visto que ele não considera os sistemas não euclidianos, embora alguns autores – como Thomas Reid – tenham apresentado suas defesas de uma geometria não euclidiana. Com efeito, apenas no séc. XIX com Gauss e Poincaré, surgem propostas factíveis de um método para determinar a escolha dos sistemas. Gauss foi o primeiro, propondo que a determinação deveria ser feita por meio de uma medição física, mas, segundo Carnap, a maioria dos filósofos seguiu mantendo que a geometria é independente da experiência. Helmholtz também considerava a questão da escolha entre os sistemas geométricos uma questão a ser decidida por critérios empíricos, embora tenha sugerido que a estrutura mais geral do espaço comum a ambos os sistemas permaneceria uma pressuposição necessária de toda e qualquer dimensão espacial, de modo que mantém uma orientação "transcendental" aos moldes kantianos de uma forma de nossa intuição espacial (cf. FRIEDMAN, 2002, p. 171–190). Poincaré seguiu essas bases, mas, no que concerne à geometria em particular, advogou a livre escolha baseada numa *convenção* subordinada apenas a um critério de simplicidade. Para ele, os cientistas deveriam escolher a geometria euclidiana por causa de sua simplicidade. Mas é com Einstein que a balança pende para o lado das novas geometrias. Quando ele aplica certa geometria não euclidiana em sua teoria da relatividade, obtém uma considerável simplicidade para seu sistema da física.

Partindo desses novos resultados obtidos e estabelecidos por Einstein, a situação da natureza da geometria se transforma, sendo necessária uma divisão entre geometria pura e geometria física. Nessa nova perspectiva, a geometria pura passa a lidar com estruturas abstratas que nada dizem sobre o espaço físico, e esse passa a ser matéria da geometria física. Como veremos no que segue, essa divisão é impensável para Kant. Mas é justamente essa distinção que leva Carnap e outros a impor o abandono da teoria kantiana da geometria.

A principal afirmação do empirismo lógico para negar a teoria kantiana é que o principal exemplo de conhecimento sintético a priori, não é, no final das contas, sintético. Friedman faz questão de mostrar que "nenhum conhecimento matemático, nas bases da redução feita por Frege e Russell, nem o conhecimento empírico, nas bases da redução feita por Carnap, exige o sintético a priori kantiano" (FRIEDMAN, 2002, p 93). Nessa perspectiva, e apenas nessa, o empirismo radical triunfa, embora dependa da nova lógica apresentada por Frege e Russell. Veremos que esse tipo de argumentação não pode ser levada adiante por aqueles que pretendem compreender a geometria kantiana nas bases em que esta foi alicerçada. Pode servir apenas como argumento para uma recusa total da teoria como fazem Carnap e os formalistas, apenas como um exemplo; mas não pode proporcionar o entendimento da teoria em seus próprios termos.

Nessa medida, para o segundo grupo de intérpretes, os que veem em Kant uma importante interpretação do conhecimento matemático, uma variação nas interpretações pode ser apontada. Aqui, ou temos comentários que reinterpretam a letra kantiana na tentativa de conciliá-la como o desenvolvimento da lógica contemporânea, ou temos comentários que – como os de Michael Friedman – tentam igualmente sublinhar a contribuição de Kant, mas primam por mantê-las dentro do escopo da lógica tradicional – ou como o próprio Friedman faz questão de afirmar – da lógica monádica.

Dentro desse amplo contexto interpretativo, optar por uma ou outra posição nos põe diante de vantagens e prejuízos próprios a cada uma delas. É claro que se desejamos nos concentrar na compreensão da Filosofia da Matemática como uma disciplina que pretende responder aos problemas filosóficos provenientes da matemática atual, o abandono da posição kantiana é inevitável. Não somente pelo advento da geometria não euclidiana, ou pela teoria da relatividade, mas principalmente pela própria concepção de matemática como disciplina e, consequentemente, do fazer e do pensar matemático.

Em contrapartida, se desejamos compreender a filosofia da matemática kantiana propriamente dita, e sua implicação no projeto da filosofia crítica, temos que aceitar suas limitações. Isso significa que não devemos nos desprender do texto kantiano reinterpretando os termos a luz das concepções contemporâneas, embora isso nos conduza a ter que em certos momentos afirmar a obscuridade do texto kantiano e seus limites. Isso, à primeira vista pode parecer reducionista, ou um abandono da defesa de Kant, mas se nos mantivermos numa perspectiva contextualista, várias dessas aparentes obscuridades podem ganhar luz e, o mais importante, esclarecer outros aspectos da filosofia crítica. Optando por essa segunda postura na abordagem do texto kantiano não temos a intenção de desconsiderar a crítica neopositivista como anacrônica ou algo que o valha. Apenas guardaremos essa discussão como uma importante consideração para a filosofia da matemática, embora não componha o escopo do presente trabalho. Gostaríamos apenas de salientar que independentemente do aparato conceitual que se estabelece segundo as novas considerações da física einsteiniana, o problema que acompanha as considerações de Kant sobre a filosofia da matemática, a saber, a natureza do espaço, continua em pauta nas discussões filosóficas contemporâneas. Embora a Teoria da Relatividade apresente uma compreensão inteiramente nova sobre o papel que a geometria e a estrutura geométrica desempenham na imagem do mundo físico, novamente duas concepções muito diferentes e incompatíveis da estrutura geométrica emergem dessa teoria. Friedman as apresenta como uma “fisicalização” das estruturas geométricas e uma “idealização” das mesmas. Guardadas todas as especificidades do debate atual, os filósofos da ciência seguem se perguntando sobre a realidade ou a idealidade das estruturas geométricas e, por consequência, do espaço (cf. FRIEDMAN, 1991, p 13). Isso nos leva à principal questão que tem orientado nosso trabalho. O que Kant estava afirmando quando formulou aquilo que conhecemos como a tese da idealidade transcendental do espaço? E mais, por que, apesar das características inovadoras encontradas em sua doutrina do espaço, ela aparece vinculada a geometria? Isso deixa claro que não é exclusivamente a filosofia da matemática kantiana que nos interessa aqui. Queremos também saber em que medida essa filosofia pode nos auxiliar na compreensão da tese da idealidade transcendental do espaço.

Por vezes durante as leituras do texto da primeira *Crítica* e outros, mesmo os pré-críticos, somos levados a conectar Filosofia da Matemática com a Doutrina do espaço e tempo. Nosso interesse é, em primeiro lugar, compreender o que Kant pretende quando estabelece a sua Doutrina da Idealidade do Espaço. O que significa dizer que o Espaço é ideal com relação às coisas consideradas como coisas-em-si? E, em contrapartida, real quando as coisas são consideradas como fenômenos? E ainda, em que medida a pretensa idealidade do espaço é necessária para que uma parte importante da teoria kantiana do conhecimento, a matemática, possa ser considerada consistente e sua natureza possa ser devidamente compreendida. Considerar a natureza do espaço como ideal possibilita a resolução de vários problemas tratados pela Filosofia Transcendental. O exemplo mais explícito dessa resolução pode ser encontrado nas "Antinomias da Razão Pura", as duas primeiras principalmente. Mas de uma forma geral, o espaço (e o tempo) são invocados implicitamente em todo o edifício crítico por constituírem as formas puras da sensibilidade humana.

O que tentaremos mostrar é que a conexão já mencionada entre Filosofia da Matemática e Doutrina do espaço e tempo surge justamente nos argumentos kantianos que pretendem garantir ao espaço *per se* o estatuto de forma da sensibilidade humana. A necessidade de que o espaço seja uma forma pura da sensibilidade é uma prerrogativa da Filosofia Transcendental. Mas a necessidade de que essa forma pura tenha os moldes do espaço geométrico regido pelos axiomas da geometria euclidiana, tendo como propriedades a ausência de limites, a isotropia, a tridimensionalidade, a homogeneidade e principalmente a divisibilidade infinita, é uma necessidade que a Filosofia Transcendental quer nos fazer crer que pertence genuinamente à Filosofia natural, ou à condição de possibilidade das ciências empíricas. De tal modo que não basta que o espaço seja a forma da sensibilidade humana, mas ele deve constituir a natureza dos objetos da experiência, não somente a experiência possível, mas a experiência empírica, constituindo os objetos como individuais.

Gerard Lebrun (1993) fundamentado em alguns comentários de Kant lembra que a Dialética, que nas edições da *Critica da Razão Pura* constitui a segunda parte da Lógica Transcendental, seria o livro pelo qual uma apresentação popular da *Crítica* deveria ser iniciada. Mas que importância essa reestruturação dos livros da *Crítica* poderia ter para a nossa incursão sobre algo que gostaríamos de chamar de Filosofia da matemática de Kant?

Falaremos aqui de conteúdos como temas dessas partes da *Crítica*. Comecemos pela Dialética que já mencionamos. Nessa parte o conteúdo a ser destacado é o diagnóstico de um tipo específico de ilusão: a ilusão transcendental, que tem sede na razão enquanto faculdade. A característica distintiva dessa ilusão é sua inevitabilidade. A partir dessa ilusão inevitável, a razão produz determinadas inferências dialéticas. Tais inferências, segundo Kant, constituem aquele tipo de conhecimento pretendido como metafísico pelos dogmáticos. Os objetos dessas inferências podem ser diretamente correspondidos aos propostos pelos dogmáticos como Wolff e Baumgarten, a saber, a psicologia racional, a cosmologia racional e a teologia racional. Os diagnósticos da primeira e da última inferência não nos interessam de imediato, mas o da cosmologia racional, que na primeira *Crítica* Kant chama de Antinomia, é de imediato interesse porque ela é relativa às categorias da quantidade e da qualidade. Apresentaremos os detalhes dessa consideração no que segue. O importante, por enquanto, é lembrar que a cosmologia se refere ao mundo, ao seu início no tempo, a sua extensão no espaço e a sua unidade máxima e mínima. Aqui começamos a perceber a conexão. Segundo Lebrun (1993), é inevitável a conclusão de que na Antinomia se a ilusão existe é porque o mundo foi considerado discreto enquanto só pode ser considerado continuo. Nessa medida, o problema pode ser transcrito para uma questão acerca da natureza do espaço. A teoria do espaço e tempo como formas da intuição sensível é, por sua vez, apresentada por Kant, na segunda edição da primeira *Crítica*, em duas partes: uma exposição metafísica e uma exposição transcendental. Nesse momento, Kant apresenta sua concepção de idealidade do espaço, concepção essa que tem como sua contraparte necessária o realismo empírico do espaço. Todas as afirmações feitas com relação ao espaço valem também para o tempo, exceto pela diferença relativa às partes que no espaço são simultâneas e no tempo são sucessivas.

Até aqui, nada a reparar. O problema surge em seguida, quando, para garantir a idealidade do espaço, Kant se vê obrigado a apelar para as características da geometria, e ele faz isso durante a exposição transcendental. Mas a concepção de matemática, numa forma mais bem detalhada só aparecerá na última parte da primeira *Critica*, na Doutrina Transcendental do Método. Esse afastamento espacial levou alguns comentadores diagnosticarem também uma profunda incompatibilidade entre a concepção de matemática apresentada na doutrina do método e a teoria do espaço da estética[1]. Esse é o panorama geral que subjaz a discussão kantiana da filosofia da matemática. O principal problema encontrado pelos comentadores e pelos filósofos que se opuseram a compreensão kantiana do conhecimento matemático é justamente a premissa kantiana sobre a natureza da matemática. Kant parte do

1 Jaakko Hintikka sugere que o método matemático apresentado na Doutrina do método é sistematicamente anterior a Estética Transcendental, e dessa forma o termo intuição no método matemático não possuiria o mesmo significado encontrado nas exposições da Estética, se for assim o termo intuição deve ser considerado num sentido não intuitivo e isso seria o mesmo que dizer que na Doutrina do Método intuitividade significa apenas individualidade. Na Estética ele torna as intuições novamente intuitivas ligando-as a nossa sensibilidade. Mas essa conexão nunca foi tomada por Kant como uma mera consequência lógica da definição de intuição pura, portanto deveria ser provada e não meramente assumida. As provas dessa conexão ele as deu na Estética (cf. HINTIKKA, 1992, p. 23 e 25).

pressuposto de que a matemática é sintética a priori e que o espaço da nossa experiência sensível é euclidiano. Mas o surpreendente é mesmo sua argumentação para justificar a edificação de tal conhecimento, a saber, seu espírito sintético–intuitivo e principalmente a garantia do caráter a priori para proposições sintéticas encontradas na matemática, a saber, seu mecanismo de "construção na intuição pura", portanto o que poderíamos chamar hoje de uma disposição construtivista que cumpre uma função justificacional tanto na ontologia quanto na epistemologia matemática.

Para atingir o objetivo principal desta dissertação, deveremos, então, também dedicar-nos ao esclarecimento do procedimento construtivo de apresentar os conceitos na intuição, ou como Kant fala, de construir os conceitos matemáticos na intuição pura. Esse esclarecimento será, portanto, o fio condutor da presente investigação e por meio dele esperamos esclarecer a compreensão kantiana do conhecimento matemático e, por conseguinte, a condição *sui generis* da representação kantiana do espaço e da ciência dele, a geometria.

No primeiro capitulo deste trabalho apresentaremos alguns conceitos fundamentais desenvolvidos pela filosofia crítica kantiana. A primeira secção apresentará o conceito de intuição que explicaremos a partir do binômio intuição/conceito. Compreender exatamente o que Kant pretende estabelecer quando afirma que algo é uma intuição é fundamental para alcançarmos o cerne do problema sobre a tese da idealidade do espaço que será o segundo conceito a ser apresentado. Isso porque, como veremos, quando Kant inicia sua investigação sobre o espaço propriamente dito, ele parte da analise da representação do *conceito* de espaço para afirma-lo ao final como uma intuição.

O segundo é o conceito de espaço. Apresentaremos essa secção acompanhando a forma como ele (o conceito de espaço) foi apresentado na Segunda edição da *Crítica da Razão Pura*. Isso quer dizer que sobre o espaço seguiremos a abordagem kantiana da dupla exposição, a metafísica e a transcendental. A exposição metafísica será subdividida em duas teses, a tese da aprioridade e a tese da intuitividade. Kant apresenta um bloco de quatro argumentos que dividiremos dois a dois respectivamente. A exposição transcendental apresenta a relação do conceito de espaço com o corpo de conhecimento sintético a priori que decorre dele, a geometria. Nesse momento, apresentaremos o argumento que ficou conhecido como "argumento da geometria", em outro capitulo discutiremos as implicações desse argumento para a interpretação a tese da idealidade transcendental do espaço.

No terceiro capitulo apresentaremos algumas considerações sobre a matemática. Faremos uma breve apresentação da questão sobre a certeza matemática no século XVII que ficou conhecida como *Quaestio de Certitudine Mathematicarum,* para em seguida nos determos na análise das provas por contradição e das provas diretas com o intuito de caracterizá-las como métodos matemáticos.

No quarto capitulo discutiremos a filosofia da matemática kantiana a partir do que ele apresenta como o método da matemática por excelência, a construção na intuição pura. Nossa discussão passará pelo caráter incompleto da axiomatização promovida por Euclides, a interpretação intuitiva da divisibilidade infinita e, por fim, uma tentativa de esclarecer diretamente a natureza da construção na intuição pura.

Para a conclusão, reservamos uma tentativa de recuperar as análises anteriores para, finalmente, responder diretamente a questão sobre o estatuto do argumento da geometria para a sustentação da tese da idealidade transcendental do espaço.

Primeiro Capitulo: Conceitos da Filosofia crítica

1. Intuição

Intuição e conceito são as únicas formas de cognição humana. Ambos são acessos cognitivos aos mesmos objetos, embora difiram em suas respectivas formas. Kant se coaduna à tradição aristotélica quando afirma o caráter imediato da intuição, embora confira à intuição um caráter formal *a priori*.

A intuição kantiana é, portanto, a forma de cognição pela qual é possível *ver* objetos, ao contrário do conceito que é o meio pelo qual é possível *pensar* objetos. A intuição enquanto forma é uma exibição do objeto que, a cada vez, constitui-se como matéria da cognição; é o modo pelo qual o conhecimento se refere imediatamente aos objetos.

Outra especificidade da intuição kantiana é sua conexão necessária com a sensibilidade. Quando os objetos afetam de alguma maneira a sensibilidade, que é nossa capacidade de sermos afetados, eles geram um efeito que é denominado sensação. Quando a sensibilidade, na medida em que é afetada pelo objeto, refere-se a ele por meio da intuição e considera nessa relação a sensação, Kant afirma que temos uma intuição que é empírica. A intuição empírica de objetos particulares pode ter lugar sem os conceitos necessários à caracterização do objeto, de modo que se pode intuir alguma coisa sem pensar algo com ou nessa intuição. Uma intuição que não se encontra vinculada a nenhuma sensação e, portanto, não é estruturada sobre nenhum dado sensível, é considerada por Kant como uma intuição pura. Compreender o que possa ser uma intuição pura exige um pouco mais de trabalho. Mas uma distinção inicial, que Kant estabelece no início da Estética Transcendental, pode ajudar. A intuição pura pode ser entendida como a forma da intuição que, quando é relativa à sensação, torna-se uma intuição empírica. Por exemplo, na *Lógica de Jäsche,* Kant afirma:

> "Assim, por exemplo, se um selvagem vê a distância uma casa cujo uso não conhece, ele tem, é verdade, diante de si na representação o mesmo objeto representado por uma outra pessoa que o conhece de maneira determinada como uma habitação destinada a pessoas. Mas, segundo a forma, esse conhecimento de um e mesmo objeto é diverso em ambos. Em um é mera intuição, no outro, intuição e conceito ao mesmo tempo." (AK 33)

Mas a possibilidade da intuição ter seu lugar de modo isolado do conceito, não a torna uma representação obscura ou confusa, perdendo sua característica de cognição. E pode ser assim porque a cognição intuitiva possui por si mesma uma qualificação própria denominada *distinção estética*, que é relativa exclusivamente aos objetos particulares. Essa distinção estética, que em Kant deve ser contrastada com a distinção lógica, pode ser caracterizada pela relação entre a matemática e o conhecimento empírico. Os objetos particulares podem ser considerados distintos justamente porque são individualizados por meio dos esquemas que possuem as características espaciais encontradas nos axiomas da geometria. A principal diferença é que, embora os conceitos sirvam para caracterizar, classificar e distinguir objetos, eles podem fazê-lo apenas qualitativamente. A distinção numérica, aquilo que pode com certeza afirmar que aquilo que é representado é um e somente um objeto, e que é, a despeito de todas as semelhanças qualitativas, diferente daquele outro, seja lá o que queiramos afirmar como objeto, é necessariamente dependente da disponibilidade de representações intuitivas (cf. TORRES, 2004, p 54-9).

Se de fato podemos aceitar isso, é possível nos concentrarmos na investigação sobre as intuições relativas apenas ao seu aspecto puro. Kant afirma que, para a cognição humana, podemos apenas considerar dois tipos de intuições puras, a saber, o espaço e o tempo. Nessa medida espaço e tempo são os princípios formais da intuição, ou seja, as únicas condições sob as quais um objeto pode constituir-se como um objeto de nossos sentidos. No caminho percorrido na Estética Transcendental para explicitar esses princípios formais estabelecidos como o espaço e o tempo, Kant executa um procedimento de analise ou decomposição dos elementos que compõem a sensibilidade.

> "(...) isolaremos em primeiro lugar a sensibilidade separando tudo o que o entendimento pensa nela mediante seus conceitos, a fim de que não reste senão a intuição empírica. Em segundo lugar, desta última ainda separaremos tudo o que pertence à sensação, a fim de que nada mais reste senão a intuição pura e a mera forma dos fenômenos, a única coisa que a sensibilidade pode fornecer a priori." (A22/B36)

Aqui Kant deixa claro que, terminada a análise da sensibilidade, permanece apenas o componente formal da intuição. No parágrafo imediatamente anterior à citação acima, em A21/B35, Kant afirmara que retirado da representação do corpo aquilo que pertence ao entendimento (substância, força, divisibilidade) e aquilo que pertence à sensação (dureza, cor), ainda resta algo da intuição empírica, a saber, extensão e figura. Se, na decomposição da sensibilidade, o mais anterior é justamente a intuição pura e, na decomposição do corpo (objeto da sensibilidade), o mais anterior é a extensão e a figura, podemos afirma que a intuição pura (a forma da intuição empírica) só pode ser mesmo o espaço.

Assim, trataremos agora de compreender o que Kant quer dizer quando afirma que o espaço é uma intuição pura.

2. O Espaço

2.1 Um único espaço duas exposições.

A investigação sobre as formas puras da intuição, a saber, o espaço e o tempo, é apresentada por Kant de duas maneiras. Ambas são, igualmente, exposições; contudo, uma exposição difere da outra porque a primeira se pretende metafísica e a segunda, transcendental. Uma exposição é metafísica quando apresenta o que representa o conceito como dado *a priori*. A exposição transcendental, por sua vez, deve apresentar a explicação do conceito quando considerado como princípio a partir do qual é possível entender outros conhecimentos sintéticos *a priori*. Contudo, para que tal exposição seja possível, é necessário que dois critérios sejam satisfeitos, a saber, i) que existam conhecimentos sintéticos *a priori* que decorram dos conceitos expostos e, ii) que tais conhecimentos sejam possíveis se, e somente se, pressupusermos uma exposição do tipo transcendental.

Ao que parece, o texto kantiano pretende que os conceitos de espaço e tempo sejam de um tipo tal que possibilitem e, na mesma medida, exijam essa dupla exposição. Adiante veremos quais são os argumentos que pretendem apresentar as garantias da existência de um conhecimento sintético *a priori* fundamentado nas intuições puras. Por ora, passemos à investigação do conceito de espaço segundo as exposições da Estética.

2.2. Exposição metafísica.

A Exposição Metafísica apresentará os argumentos destinados a sustentar a característica peculiar do espaço kantiano. Esse conjunto argumentativo pretende garantir uma dupla característica ao espaço, a aprioridade e a intuitividade, de modo que a conclusão seja a de que o espaço (e o tempo) deve ser uma intuição pura a priori. Em contrapartida, caberá à Exposição Transcendental apresentar o que mais nos interessa nesta discussão da doutrina kantiana do espaço, a saber, que ele é transcendentalmente ideal.

A forma como Kant articula os argumentos que pretendem mostrar a natureza das representações do espaço e tempo podem a princípio trazer alguma dificuldade para a compreensão do leitor. Kant começa suas exposições tratando as representações do espaço e do tempo como conceitos. Mas os passos que constituem as provas pretendem sustentar que considerar as representações do espaço e do tempo como conceitos é a fonte dos equívocos da filosofia dogmática. Portanto, Kant trata os conceitos de espaço e tempo com o intuito de provar que eles, ao contrário do que pensavam os dogmáticos, principalmente Leibniz e Newton, não são absolutamente conceitos, mas intuições; e não somente intuições, mas são antes intuições a priori. No que segue, apresentaremos apenas as exposições relativas ao espaço, tendo em vista que as exposições sobre o tempo diferem em momentos muito específicos, e principalmente porque não contribuem expressivamente para a compreensão do problema que fundamental precisamos investigar, a saber, o papel da construção na intuição pura no estatuto da filosofia matemática kantiana referente à geometria.

Passemos sem mais a investigação das teses que compõem o argumento em defesa do espaço como intuição pura a priori.

A tese da aprioridade.

Os dois primeiros argumentos da exposição metafísica pretendem garantir a característica da aprioridade do espaço. O primeiro argumento tem como conteúdo a seguinte proposição:

> 1) O espaço não é um conceito empírico abstraído da experiência externa, pois ele é pressuposto quando nos referimos às sensações de algo externo.

Aqui é fundamental termos em mente que aos conceitos apenas duas condições são logicamente possíveis: ou o conceito é empírico e, portanto, extraído (abstraído) da experiência ou é a priori, quando é apenas relativo ao entendimento sem nenhum fundamento na experiência. Portanto, para garantir ao espaço sua condição de aprioridade é necessário antes mostrar que a ele é vedada a possibilidade de ser um conceito empírico. Vejamos como Kant discorre sobre isso.

> “Efetivamente, para que determinadas sensações sejam relacionadas com algo exterior a mim (isto é, com algo situado num outro lugar do espaço, diferente daquele em que me encontro) e igualmente para que as possa representar como exteriores [e a par] umas das outras, por conseguinte não só distintas, mas em distintos lugares, requer-se já o fundamento da

> noção de espaço. Logo, a representação de espaço não pode ser extraída pela experiência das relações dos fenômenos externos; pelo contrário, esta experiência externa só é possível, antes de mais, mediante essa representação." (A23/B38)

Como vemos na prova acima, Kant considera duas possibilidades, i) quando a representação se refere a algo fora de mim, e ii) quando represento objetos externos uns aos outros. Essas duas possibilidades necessitam de um pressuposto que deve ser, obviamente, o próprio espaço. Primeiramente (em i), a questão central é que a consciência de que os objetos são externos a mim é compreendida por Kant como o "sentido externo". Mas de forma alguma essa consciência pressupõe o espaço, de modo que "estar fora" nesse contexto não exige tal pressuposição espacial. Mas, como vimos, Kant declara textualmente essa necessidade, o espaço é o meio pelo qual nos tornamos consciente da exterioridade, o espaço não pode ser extraído das relações, mas antes, tais relações são possíveis mediante a representação do espaço.

Se essa necessidade possuísse um estatuto lógico, se a relação entre consciência do sentido externo e a pressuposição do espaço possuíssem uma necessidade lógica, o argumento poderia ser considerado tautológico. Mas é justamente o contrário. Kant não fala aqui de anterioridade necessária, mas de pressuposição. Isso garante que a outros seres, com uma sensibilidade diferente da nossa, a exterioridade possa estar ligada a outros pressupostos e não necessariamente ao espaço, de tal modo que o argumento se encontra-restrito à percepção humana.

Em segundo lugar (em ii), o problema está em considerar os objetos externos entre si e, portanto, em sustentar o substrato da diversidade dos objetos. Aqui, a questão é representar os objetos não apenas como diferentes entre si, mas em diferentes lugares. Novamente, a sombra da tautologia obscurece o argumento. Mas se pudermos compreender essa diferença não só como uma diversidade qualitativa, mas como uma diversidade quantitativa – para a consciência da exterioridade dos objetos entre si – são necessárias não apenas suas diferenças qualitativas, mas principalmente suas diferenças de lugar. Nesse caso, a tautologia desaparece.

A representação do espaço que garante à representação do objeto a possibilidade de ocupar um lugar torna-se, pois, uma condição necessária para que possamos distinguir os objetos entre si. Novamente, é importante ressaltar que, como antes, essa necessidade da pressuposição do espaço não possui o caráter de necessidade lógica (cf. ALLISON, 1983, p. 83). É claro que o argumento kantiano não pretende afirmar que a representação do espaço deva ser pressuposta com o intuito de reconhecer que as coisas em si sejam espaciais, pois, se assim fosse, teríamos novamente um argumento tautológico. Antes, ele argumenta que o espaço é necessário a fim de que nos tornemos conscientes das coisas como distintas de nós e distintas entre si. Como vimos, a representação do espaço não se encontra na própria concepção de exterioridade, assim como o azul já se encontra no pensamento da coisa azul. Portanto, a consciência da exterioridade dos objetos é condição necessária para possibilidade da experiência. E o argumento mostra que a consciência do sentido externo pressupõe (embora não logicamente) a representação do espaço.

É dessa forma que o primeiro argumento da Exposição Metafísica *garante a aprioridade do espaço* e ainda mostra que o espaço possui uma *função que é exclusivamente epistêmica* (cf. ALLISON, 1983, p. 86). Se concordarmos com a análise de Allison, podemos concluir que o primeiro argumento consegue garantir a condição de anterioridade da representação do espaço, já que a representação do sentido externo exige (embora não logicamente) a pressuposição do espaço.

Embora o primeiro argumento garanta a aprioridade da representação do espaço, Kant acrescenta outro argumento. Vejamos em que medida esse segundo argumento contribui para a tese central.

A síntese do segundo argumento pode ser apresentada como segue:

> 2) O espaço é uma representação necessária a priori, pois não podemos imaginar nada em que não haja espaço, embora possamos imaginá-lo como vazio.

Inicialmente, é impossível não perceber uma redundância. Kant pretende, mais uma vez, provar a condição a priori do espaço por meio da relação com o sentido externo. Embora o argumento pretenda obter a mesma conclusão, veremos que o transcurso da prova elabora um caminho novo. Ele é equivalente ao anterior, embora sua formulação seja positiva. Dessa forma, o argumento tem salvaguardada sua "utilidade", podendo ser defendido de eventuais críticas com relação a sua inutilidade na economia do texto kantiano. Vejamos como Kant apresenta a prova para esse argumento.

> "O espaço é uma representação necessária, *a priori*, que fundamenta todas as intuições externas. Não se pode nunca ter uma representação de que não haja espaço, embora se possa perfeitamente pensar que não haja objetos alguns no espaço. Consideramos, por conseguinte, o espaço a condição de possibilidade dos fenômenos, não uma determinação que dependa deles; é uma representação *a priori*, que fundamenta necessariamente todos os fenômenos externos." (A24/B38-9)

A compreensão dessa prova está condicionada à compreensão de uma impossibilidade. Na primeira parte da prova, onde lemos “Não se pode nunca ter uma representação de que não haja espaço”, nos deparamos com aquela impossibilidade de imaginar a ausência de espaço. No argumento anterior, o meio pelo qual representamos os fenômenos como fora de nós ou como externos uns aos outros é, justamente, aquilo que permite representá-los como externos. Por isso, a impossibilidade a que Kant se refere não é apenas a impossibilidade de representar no pensamento a ausência do espaço, mas antes a impossibilidade de remover o espaço e ainda permanecer a possibilidade de ter algo para ser intuído como externo.

Do simples fato, como já vimos, de que não podemos representar as coisas sem concomitantemente *pensá-las* como estando em um espaço, não segue necessariamente que o espaço seja a priori. E nesse sentido, a segunda parte da prova é necessária. Não basta mostrar que somos incapazes de pensar os fenômenos e remover o espaço desse pensamento; é preciso mostrar que podemos representar o espaço independente de qualquer fenômeno. Portanto, é necessário mostrar que podemos pensar que “não haja objeto algum no espaço”. E, se assim for, se não pudermos representar a ausência do espaço, e em contrapartida pudermos representá-lo independentemente da representação de qualquer fenômeno, portanto vazio, estará provada a aprioridade do espaço (cf. ALLISON, 1983, p. 88).

O primeiro argumento é competente em provar o estatuto a priori do espaço (e do tempo, já que as provas para o tempo seguem o mesmo raciocínio) e estabelecer sua única função no processo do conhecimento, a saber, seu papel estritamente epistêmico no processo do conhecimento.

Novamente, seria óbvio concluir que o segundo argumento pareceria supérfluo. Mas esse não é o caso. Como vimos, o segundo argumento garante uma característica para a representação do espaço que é fundamental para a posição de Kant e é negligenciado no primeiro argumento, qual seja, o fato de podermos – e devermos – representar o espaço como vazio e, portanto, como completamente independente dos fenômenos. Esse segundo argumento garante à representação do espaço certo conteúdo próprio, um conteúdo exclusivo, acessível ao pensamento mediante a abstração feita de todo conteúdo empírico.

É claro que não podemos entender essa permanência de conteúdo como sendo a afirmação de substancialidade do espaço, pois de forma alguma o espaço vazio pode ser percebido ou experienciado. Mas a permanência desse conteúdo garante ao pensamento a possibilidade de pensar o espaço vazio no processo de abstração (cf. ALLISON, 1983, p. 89). Veremos no que segue que cabe à geometria o papel de estabelecer as regras para a explicitação desse conteúdo exclusivo da representação do espaço.

Tese da intuitividade.

O bloco argumentativo em favor da intuitividade é apresentado novamente, por Kant, em duas partes. Os dois argumentos que compõem esse bloco apresentam as provas para a afirmação kantiana de que, para além da condição de anterioridade da representação do espaço e, portanto, de sua característica a priori, essa representação não pode de maneira alguma ser um conceito. Se isso é certo, resta à representação do espaço a única alternativa resguardada à cognição, a saber, a de ser uma intuição. Se o conjunto das provas, as anteriormente apresentadas e as que seguem, puder garantir essa dupla característica, intuitividade e aprioridade, a essa forma de cognição, segue que o espaço só pode ser uma *intuição pura*.

Esses argumentos sofreram importantes alterações deste a sua formulação na primeira edição da *Crítica da Razão Pura*, de modo que onde houver necessidade faremos referências ao conteúdo encontrado nas duas edições da primeira *Crítica.*

O primeiro argumento que compõe a tese a intuitividade pode ser transcrito da seguinte maneira:

> 3) O espaço não é um conceito (discursivo) sobre as relações das coisas em geral, pois há apenas um espaço do qual os demais espaços são considerados apenas como partes desse espaço uno, e não como exemplos dele.

Temos que lembrar que nesse momento já temos garantido pelas provas anteriores que a representação do espaço é necessariamente a priori. Embora sua necessidade não seja lógica, o espaço é sempre representado como condição para a representação dos fenômenos externos. A partir de agora, a preocupação de Kant é justamente provar que essa condição da representação dos fenômenos externos não pode de forma alguma estar estabelecida em um conceito. O seu objetivo é, portanto, é provar que aquilo que é a priori – logo, condição epistêmica – é justamente uma intuição pura. Vejamos como Kant estabelece a prova.

> “O espaço não é um conceito discursivo ou, como se diz também, um conceito universal das relações das coisas em geral, mas uma intuição pura. Porque, em primeiro lugar, só podemos ter a representação de um espaço único e, quando falamos de vários espaços, referimo-nos a partes de um só e mesmo espaço. Estas partes não podem anteceder esse espaço único, que tudo abrange, como se fossem seus elementos constituintes (que permitissem a sua composição); pelo contrário, só podem ser pensados *nele. É* essencialmente uno; a diversidade que nele se encontra e, por conseguinte, também o conceito universal de espaço em geral, assenta, em última análise, em limitações. De onde se conclui que, em relação ao espaço, o fundamento de todos os seus conceitos é uma intuição *a priori* (que não é empírica). Assim, as proposições geométricas, como, por exemplo, que num triângulo a soma de dois lados é maior do que o terceiro, não derivam nunca de conceitos gerais de linha e de triângulo, mas da intuição, e de uma intuição *a priori*, com uma certeza apodítica.” (A25/B39)

Nesse momento, Kant opera com a importante distinção já mencionada entre intuição e conceito. Mais uma vez a estratégia kantiana é apresentada de forma negativa. Ao invés de provar que a representação do espaço deve ser uma intuição, Kant mostra como se torna inviável para a representação do espaço, dada suas características, ser considerada um conceito. O objetivo do argumento é mostrar que se à representação do espaço estiver vetada a possibilidade de ser um conceito geral, deve-se sem mais tomá-la como uma intuição. Kant parece argumentar por meio de dois movimentos distintos. O primeiro no sentido de contrastar a relação que o espaço *per se* mantém com suas partes com a relação que um conceito geral mantém com sua extensão (notas ou partes do conceito). O segundo movimento aponta para os contrastes com a relação que o conceito geral mantém com sua intensão.

Vemos de imediato que uma segunda distinção estabelecida por Kant é fundamental para a compreensão de argumento: a distinção entre extensão e intensão de um conceito. A extensão de um conceito deve ser compreendida como a relação lógica de subsumir um número ilimitado de conceitos mais particulares a um conceito mais geral. Desse modo, a extensão de um conceito é virtualmente infinita. Enquanto que a intensão, sempre finita, é uma reunião de características qualitativas que estabelecem a definição de um conceito.

O primeiro contraste entre espaço/partes-do-espaço e conceito/nota-do-conceito (ou conceitos particulares) pretende garantir ao espaço sua condição de singularidade. Já o segundo contraste, se bem sucedido, deve estabelecer a condição e a natureza da compreensão da representação do espaço como uma totalidade. Neste momento, poderíamos perguntar por que seria importante assegurar a dupla condição singularidade/totalidade como garantida da característica intuitiva da representação do espaço.

A afirmação de que “só podemos ter a representação de um espaço único” inicia o primeiro movimento. A singularidade do espaço está garantida no que segue, já que Kant afirma que somos constrangidos a pensar que a variedade de espaços só pode ser pensada como partes de um único espaço. É como se, ao pensarmos, por exemplo, na casa como o espaço em que vivemos, pensássemos que ela é apenas parte de um espaço maior que é a cidade, e esta, por sua vez, parte de um espaço ainda maior que é o país e assim sucessivamente. Todas essas partes contidas em partes maiores são espaços. É claro que a possibilidade de pensar as partes do espaço nessa relação não garante de forma alguma que o espaço seja uma intuição. Pensar o espaço como uma coleção de partes ou uma totalidade de modo algum permite inferir que o espaço *per se* seja uma intuição. Isso é resolvido pela consideração que leva ao segundo movimento.

Aqui é importante compreender que as partes que compõem um conceito geral são logicamente anteriores a ele, de modo que podemos afirmar que o conceito geral é uma coleção de suas partes ou notas. Mas, no caso do espaço, essa anterioridade não pode prevalecer entre as partes e o todo. Diferente das partes do conceito, as partes do espaço só podem ser pensadas mediante a representação da possibilidade de uma coleção sobre a qual se opera uma limitação das partes. Isso porque as partes do espaço só podem ser pensadas na medida em que a ideia de um espaço único é pressuposta. Em outras palavras, o espaço não se apresenta apenas como único (singular), mas como unidade. Portanto, o espaço não pode ser considerado como uma determinada coleção ou agregado, mas tão somente como uma totalidade.

É claro que essa totalidade deve possuir características distintivas. Isso porque podemos constituir uma totalidade a partir de agregados. Nas Antinomias, a concepção de mundo apresentada na Tese e na Antítese, apresenta o mundo como um *Compositum*, um *totum syntheticum*. A reunião de todas as partes heterogenias do conceito geral pode atribuir ao conceito a condição de totalidade, se bem que potencial, porque o intelecto humano finito não é capaz de abranger uma totalidade infinita atual. Na prova, Kant afirma que não é essa a compreensão que temos da representação do espaço. Este é considerado um *Totum Analiticum*, e ele, sim, é absolutamente um *Totum*, uma totalidade.

A atividade de limitação exige, portanto, um meio que seja único, singular, para que nele possam ser determinadas limitações que garantem a possibilidade de determinação de regiões, ou lugares, onde poderá ser estabelecida a individuação dos objetos – ou das partes do espaço – externos uns aos outros. Essa atividade exige outra característica, a continuidade. Isso porque cada resultado da atividade de limitação determina uma nova parte do espaço uno. Se esse espaço fosse discreto, acarretaria a impossibilidade de determinar uma infinidade de partes, forma como o espaço é comumente representado.

Agora, é possível compreender a importante afirmação kantiana sobre a natureza das partes do espaço. A despeito de possuirmos um conceito geral de espaço e, por conseguinte, um conceito das partes que compõem esse conceito como conceitos de espaços singulares, ontologicamente as partes do espaço são determinada por uma atividade completamente subjetiva, a atividade de limitação. Como vimos acima na prova, Kant argumenta que "a diversidade que nele [no espaço] se encontra e, por conseguinte, também o conceito universal de espaço em geral, assenta, em última análise, em limitações" (A25/B32). Embora a atividade de limitação possa ser realizada indefinidamente, ela pressupõe algo sobre a qual possa ser efetivada. Pelo que foi dito acima, é fácil perceber que este algo (no caso, o espaço) não pode ser um conceito, de modo que mais uma vez fica garantido o caráter de intuição ao espaço (cf. ALLISON, 1983, p. 90-1).

A impossibilidade da representação do espaço ser um conceito repousa principalmente no tipo de relação que o espaço mantém com suas partes. O conceito relativo às suas partes não pode ser limitado, não pode ser restringido. O conceito como vimos é infinito (potencialmente) quando referente às suas partes, à sua extensão. Mas as partes do espaço são sempre limitações de algo que é anterior a elas. Aqui, na Exposição Metafísica, enquanto Kant apenas pretende expor a natureza da representação do espaço, não se pode explicar o que constitui esse processo de limitação e quais são as regras que apresentariam as garantias de que a representação do espaço realmente possua essa relação com suas partes. É justamente o método matemático da construção na intuição pura, do qual trataremos mais adiante, que estabelece as regras para esse processo de limitação constituinte da representação dos espaços particulares ou individuais.

A dúvida sobre a aparente contradição entre singularidade e totalidade é, portanto, legitima, se a representação do espaço for considerada como um conceito. Mas, como Kant pretende ter provado, a representação do espaço é uma intuição, embora nela e por ela possam ser pensadas infinitas partes. E, como vimos, é completamente legítimo pensar assim, porque podemos representar diversas partes no espaço, podemos dividi-lo infinitamente, e para que isso possa acontecer a representação do espaço que contém todas as partes limitadas deles deve ser um único espaço, portanto singular, e ainda assim uma totalidade homogênea.

Mais uma vez, Kant não se dá por satisfeito e acrescenta um segundo argumento em favor da tese mais geral, que aqui, é a tese da intuitividade. O argumento seguinte pode ser resumidamente apresentado da seguinte maneira:

> 4) O espaço apresenta-se como uma magnitude infinita dada, que contém dentro de si todas as partes do espaço. Esta relação é diferente das relações entre os conceitos e os demais casos e, por conseguinte, ele não pode ser um conceito, apenas uma intuição.

Esse argumento fecha a exposição metafísica e é ele um dos argumentos mais complexos e mais problemáticos, não só por ter sido reformulado na ocasião da segunda edição da primeira *Crítica*, mas porque ele parece apresentar uma contradição nos termos. Esse argumento recebe uma reformulação na segunda edição e é a partir dela que apresentaremos a análise da prova.

> "O espaço é representado como uma grandeza infinita. Um conceito geral de espaço (que é comum tanto ao pé como ao côvado) não pode determinar nada com respeito à grandeza. Se o progresso da intuição não fosse sem limites, nenhum conceito de relação conteria em si um princípio da sua infinidade. (A25) O espaço é representado como uma grandeza infinita dada. Ora, não há dúvida que pensamos necessariamente qualquer conceito como uma representação contida numa multidão infinita de representações diferentes possíveis (como sua característica comum), por conseguinte, subsumindo-as; porém, nenhum conceito, enquanto tal, pode ser pensado como se encerrasse *em si* uma infinidade de representações. Todavia é assim que o espaço é pensado (pois todas as partes do espaço existem simultaneamente no espaço infinito). Portanto, a representação originária de espaço é *intuição a priori* e não conceito." (B40)

Nesse argumento, Kant está preocupado em apresentar as diferenças de sentido nos quais conceitos e intuições se encontram envolvidos com a infinidade. Aqui, ele pretende mostrar que a infinidade relativa a conceitos e a intuições difere na forma ou estrutura lógica de cada um deles. O argumento anterior já apresentou a diferença lógica, que nos conceitos é complexa envolvendo extensões e intensões e, no caso das intuições, a representação é de uma totalidade cujas partes somente surgem mediante de um processo de limitação. Mas, aqui, as diferenças estruturais são confrontadas com a infinidade. O segundo argumento, portanto, apenas parte dessa diferença e caminha na direção de mostrar que essa diferença na estrutura está refletida na diferença em que cada um, conceito e intuição, se relacionam com a infinidade.

Conceitos só podem ser infinitos em extensão, tendo em vista que cada conceito possui sob si uma infinidade de conceitos que formam sua extensão. Os conceitos são organizados hierarquicamente em uma relação de gênero a espécie. O menor conceito, a espécie, é introduzido por uma adição de diferenças. E essa sucessiva adição pode ser estendida infinitamente porque para a última espécie apresentada sempre é possível adicionar uma diferença gerando uma espécie ainda mais fundamental. Por outro lado, a intensão do conceito, tendo em vista que essa estabelece a definição dos conceitos, de modo que deve ser compreendida como uma totalidade, não pode estar relacionada à infinidade. Uma intensão infinita seria impossível a uma compreensão finita como a nossa. Portanto, se a questão é a relação com a infinidade, a única parte importante aqui é a extensão do conceito. Em contraste com a intuição, surgem as diferenças a que nos referimos acima.

Na intuição, compreendida como a representação de um indivíduo, suas partes estão contidas no e pressupondo o todo. As partes da extensão do conceito estão *sob ele*, diferentemente das partes da intuição que estão *nela*. As partes da intuição são introduzidas por limitações. A prova do argumento pretende mostrar que a representação do espaço quanto a sua infinidade é justamente idêntica a relação que a intuição possui com suas partes relativas à infinidade. Portanto o espaço deve ser justamente uma intuição e não um conceito (cf. ALLISON, 1983, p 93-4).

2.3. Exposição transcendental.

2.3.1. O argumento transcendental ou argumento a partir da geometria.

Como vimos, a exposição metafísica estabeleceu que a representação que temos do espaço como aquilo que possibilita nossa cognição das coisas como externas a nós e em diferentes lugares, portanto externas entre si, proporciona a prova de que esse espaço que é anterior à representação dos fenômenos, que embora possua um conteúdo específico, não pode ele mesmo ser intuído. Como podemos estar certos da realidade de algo – independente de podermos estabelecer, nesse momento, o que ele seja ontologicamente falando? A resposta a esta pergunta, se bem sucedida, deve esclarecer a relação que Kant apresenta entre o argumento da geometria e a doutrina da idealidade do espaço.

O estatuto da geometria é um algo inquestionável para Kant. A geometria é uma ciência sintética a priori. Kant não se preocupa em discutir essa questão. A natureza da geometria está decidida uma vez por todas. E isso parece decorrer do fato de que as proposições da geometria são necessariamente verdadeiras, sem que para tanto dependam dos significados de seus termos constituintes, muito menos da experiência. Mas do que, então, a verdade delas depende? Kant parece confiar que a intuição pura contenha todos os elementos necessários e suficientes para responder a essa pergunta. A intuição garante que a verdade das proposições matemáticas não dependa nem dos termos nem da experiência. Mas essa resposta ainda seria incompleta porque a intuição sozinha não conseguiria garantir nem a necessidade nem a universalidade das proposições, dado que a intuição, mesmo a pura, é sempre relativa a um singular. O que garantiria, então, a necessidade e a universalidade de tais proposições?

Uma possibilidade, apresentada por George Dicker (2004), seria que essa garantia fosse dada na filosofia da matemática kantiana pela natureza do espaço. Essa explicação poderia parecer satisfatória à primeira vista. Mas devemos lembrar que na segunda edição da primeira *Crítica*, a natureza do espaço é apresentada na exposição metafísica e lá fica apenas garantindo que o espaço é uma intuição pura a priori. Se, como o próprio Dicker afirma, a intuição, mesmo a pura, não garante sozinha a necessidade nem a universalidade das proposições geométricas, temos aqui um círculo. Podemos sugerir que, quando Dicker se refere à natureza do espaço, ele não está aludindo à natureza metafísica do espaço, a de intuição pura, mas a natureza transcendental, a *condição subjetiva de forma da intuição*. Vejamos se essa sugestão se sustenta, quando a confrontamos com o texto kantiano da exposição transcendental.

Argumento a partir da geometria

1) As proposições da geometria são sintéticas a priori.
2) Isto é possível somente se o espaço é uma condição subjetiva da intuição

____

O espaço é uma condição subjetiva da intuição

Kant parte do estatuto sintético a priori da geometria como dado e oferece uma explicação para esse fato. O nervo do argumento é a relação entre necessidade e subjetividade, ou seja, a relação entre as características necessárias das proposições geométricas e as características subjetivas do que aquelas proposições descrevem.

A exposição metafísica já mostrou que uma das características estruturais que Kant mantém como sendo impostas por nossa mente aos objetos é a espacialidade. Vimos também, e nunca é demasiado lembrar, que essa imposição não é logicamente necessária, é apenas uma condição epistêmica. De modo que a espacialidade não é ontologicamente inerente ao objeto, mas é imposta pela subjetividade, pela forma como os seres, exclusivamente humanos, tomam consciência da exterioridade dos objetos.

No argumento da geometria, apresentado na Exposição Transcendental, Kant opera com uma distinção importante sobre os juízos. Na *Crítica da Razão Pura* esses podem ser de três tipos: analíticos, sintéticos e sintéticos a priori. Para Kant, os juízos são sempre proposições do tipo sujeito-predicado. São proposições onde temos invariavelmente um sujeito do qual algum conteúdo é predicado. De uma forma esquemática juízos são proposições do tipo “S é P”.

Assim, todos os juízos em que no sujeito estão previamente contidas todas as informações que podemos encontrar no predicado dele, podemos chamá-los de juízos analíticos. A simples análise do conteúdo contido no sujeito traz à luz aquele conteúdo que encontramos no predicado. Portanto o predicado de um juízo analítico não acrescenta nenhum conteúdo ao sujeito, de modo que um juízo analítico pode ser considerado tautológico.

Diferentemente os juízos sintéticos, que possuem a mesma forma esquemática S é P, não podem ser considerados tautológicos. Isso porque mesmo mediante a análise do sujeito, será impossível encontrar o conteúdo que dele é predicado. O predicado de um juízo sintético invariavelmente apresentará um conteúdo que é diverso do conteúdo que a análise mostrou pertencer ao sujeito em questão. Portanto, para que possamos julgar e estabelecer o valor de verdade de um juízo sintético precisaremos do suporte da experiência. O recurso à experiência é que garante a verdade da relação que o juízo sintético pretende estabelecer entre um sujeito e um predicado. Assim, é visível que, diferentemente do juízo analítico, o sintético sempre apresentará um acréscimo de conteúdo. Dessa forma, os juízos sintéticos são invariavelmente empíricos.

Todavia, existe uma terceira forma de juízos que reúne propriedades trazidas pelos dois primeiros. Estes são os juízos sintéticos a priori. Nesses juízos, o caráter sintético garante o acréscimo de conteúdo, mas a garantia da veracidade na relação de forma alguma é dependente da experiência. Embora, o predicado não esteja, por assim dizer, contido no sujeito, não é a experiência empírica que garantirá que a relação entre o sujeito e o predicado não seja falsa. Nesse caso, o substituto da experiência empírica é justamente a intuição pura.

De volta à discussão sobre o argumento da geometria, a premissa maior desse argumento sustenta sem mais o caráter sintético a priori da Geometria. Kant afirma "a Geometria é uma ciência que determina sinteticamente e mesmo assim a priori as propriedades do espaço" (B40). Na sequência, ele afirma que se as proposições geométricas se referem ao espaço, este não pode ser um conceito. Visto que se elas são sintéticas a priori, e do conceito não podemos extrair proposições que ultrapassem seu conteúdo sem o auxílio da experiência, o espaço não pode ser um conceito e, por isso, deve ser uma intuição. Mas essa intuição não pode depender da percepção de um objeto, de modo que seria apenas uma intuição empírica, o que garantiria às proposições geométricas apenas seu caráter sintético. Essa intuição só pode ser pura.

Essa premissa maior que estabelece o caráter sintético a priori das proposições geométricas possui uma premissa oculta, qual seja: as proposições geométricas são apodíticas, isso quer dizer, ligadas à consciência de sua necessidade (B41). É justamente dessa premissa oculta, de caráter epistêmico, que Kant extrai a conclusão de que o espaço é a condição subjetiva da intuição – ou, em outras palavras, a forma da sensibilidade externa.

Para que as proposições geométricas sejam a priori, a intuição que é pura deve preceder na mente aos próprios objetos. Segundo Kant, a única forma de isso acontecer, de termos uma intuição, que em tese deveria ser afetada por algo, mesmo que este algo fosse apenas um múltiplo, indeterminado, mas que nesse caso precede na mente qualquer possibilidade de afecção pelo objeto, é justamente se essa intuição tiver sua sede no sujeito enquanto "disposição formal" do próprio sujeito para ser afetado por objetos, podendo ter assim uma representação *imediata* deles, isto é, uma intuição dos objetos propriamente dita. Portanto, as proposições geométricas são sintéticas a priori, apodíticas e necessárias, justamente porque o espaço é apenas uma "*disposição* formal" do sujeito, ou como Kant diz, "a forma geral do sentido externo" (B41).

A exposição transcendental mostra que um corpo de conhecimento como a geometria só é possível se existe uma representação do espaço que seja uma intuição a priori. Portanto, a geometria seria uma condição necessária para que a representação do espaço seja uma intuição pura a priori. Essa é a conclusão a que chega Allison. Mas, como vimos, e ele mesmo afirma isso, estabelecer que a representação do espaço é uma intuição pura a priori é o trabalho, como vimos bem sucedido, da exposição metafísica. Se estivermos corretos, a exposição transcendental seria supérflua ou apenas mais uma forma de provar a mesma tese. Mas esse não é o caso. A exposição transcendental pretende, além de subscrever o que já foi alcançado na exposição metafísica, provar que o conteúdo específico que permanece na abstração de todo conteúdo empírico dos fenômenos é exclusivamente formal. Dito de outro modo, ela pretende que o espaço que permanece como resultado do processo de abstração, que a intuição pura que condiciona todo o fenômeno externo, é simplesmente a forma da sensibilidade humana (externa para o caso do espaço e interna para o caso do tempo).

À geometria cabe descrever as regras que constituem essa forma da intuição chamada espaço. E, é, justamente, a forma pela qual a geometria estabelece essas regras (por meio do método caracterizado por Kant como construção na intuição pura) que garante as características específicas dessa forma da sensibilidade humana atribuídas ao espaço, características essas que estabelecem a condição de idealidade do espaço. Essa relação entre sensibilidade pura e ciência matemática fornece, então, um argumento para a idealidade transcendental.

No caso particular do espaço, o idealismo transcendental afirma que o espaço nada mais é do que a representação original da nossa sensibilidade, que é descrita e codificada pela geometria. Isso seria o mesmo que dizer que os objetos não possuem o espaço como uma propriedade inerente independentemente da relação cognitiva que tenhamos com eles. A idealidade transcendental do espaço é, pois, a conjunção dessas duas premissas: que o espaço é uma intuição a priori e que a matemática é sintética a priori, de modo que a tese da idealidade transcendental do espaço pode ser considerada uma *reductio* da suposição de que ele não é transcendentalmente real. Ora, supondo que espaço e tempo fossem eles mesmos objetos e condições de possibilidade das coisas como são em si mesmas, é notório que seria impossível para qualquer um dar conta do grande número de proposições apodíticas e sintéticas a priori sobre o espaço (A46/B64). O realismo transcendental, portanto, contradiz a característica distintiva da matemática, sua aprioridade sintética. (cf. SHABEL, 2006, p 114-5)

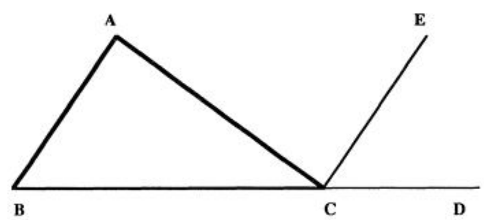
Segundo Capitulo: Considerações sobre a matemática.

1. A certeza matemática

Na Doutrina do Método, Kant afirma que a matemática “fornece o exemplo mais brilhante de uma razão pura bem sucedida que se estende espontaneamente sem o auxílio da experiência” (B740). A matemática é o cânon para uma ciência bem estabelecida e, por consequência, de um conhecimento absolutamente certo. Isso pode ser compreendido se considerarmos o consenso de que a matemática estaria conforme as especificações para uma ciência estabelecida por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores*. Mas nem sempre foi assim.

No século XVII foram levantadas severas objeções contra a justificação da certeza da matemática. Nesse período um amplo debate se estabeleceu, e as críticas que se seguiram ficaram conhecidas como *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*. Duas questões importantes emergem desse debate e ambas são de inteiro interesse, porque, de certa forma, Kant as responde, embora não intencionalmente, já que para ele a autoridade da matemática era inquestionável[2]. Mesmo assim, vejamos que tipo de dúvidas foram levantadas sobre a certeza da matemática e como elas foram respondidas por filósofos e matemáticos do séc. XVII e seus antecessores renascentistas. As questões eram: (a) a matemática se ajusta à definição

2 Que as verdades da matemática encontram-se ao abrigo das vicissitudes da natureza empírica não podendo ser por ela nem confirmadas, nem negadas, era a opinião de Kant. Essa posição pode encontrar suas raízes no ponto de vista racionalista sobre a natureza da matemática.



aristotélica de ciência? (este problema levou, por sua vez, a uma cuidadosa análise da demonstração matemática) e (b) se não se pode sustentar a certeza da matemática apelando à sua estrutura lógica, com base em que outro fundamento poderemos justificá-la? (cf. MANCOSU, 1996, p. 10) Muitos foram os argumentos apresentados como objeção à certeza matemática; apresentá-los aqui extrapolaria o escopo do trabalho, de forma que nos concentraremos em duas objeções importantes que poderão auxiliar na compreensão das afirmações de alguns comentadores em relação a Kant, quando eles afirmam que Kant considerou a deficiência presente na axiomatização da matemática proposta por Euclides, em seus *Elementos*, a saber, a intuitividade, como sendo uma característica importantíssima e fundamental do método matemático.

As objeções que consideraremos aqui são apresentadas por Pereyra, filósofo jesuíta. A primeira é relativa à Proposição I. 32 dos Elementos. Para Pereyra, existe um ponto nos teoremas de Euclides que não poderia ser facilmente interpretado causalmente.

Pereyra elege, então, a proposição I.32 dos *Elementos* de Euclides, que se destina a mostrar que a soma dos ângulos internos em um triangulo é igual a dois ângulos retos. A prova consiste em tomar o triângulo *ABC* e prolongar o lado *BC* até *D*. Em seguida, traçar *CE* paralela a *BA* (ver figura 1). Feita essa construção e, apelando a teoremas prévios, temos que *BAC=ACE* e *ECD=ABC*. Então *ABC+ACB+CAB=ACB+ACE+ECD* = dois ângulos retos. Ao que parece a tradição escolástica teria assumido a demonstração de Euclides como uma prova causal. De modo que o triângulo deve ter uma essência (dada por uma definição) que determina o restante de suas propriedades, como em uma causa formal. No caso particular, a propriedade determinada seria que a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos. Mas, para Pereyra, seria muito difícil isolar a causa pela qual a propriedade é derivada. Isso, em termos silogísticos, seria o mesmo que dizer que seria muito difícil isolar o que na demonstração desempenharia o papel de termo médio. Para ele, o que no teorema de Euclides desempenha esse papel seria justamente o apelo ao segmento auxiliar e ao ângulo externo.

Se a objeção de Pereyra é valida, ela mostraria que a prova euclidiana não pode ser verdadeiramente causal, tendo em vista que o ângulo externo e o segmento auxiliar não podem ser a causa verdadeira da igualdade (cf. MANCOSU, 1996, p. 14-5). O argumento de Pereyra pretende demonstrar a inadequação dos *Elementos* de Euclides às condições determinadas por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores*. Se as demonstrações de Euclides não podem ser reduzidas as figuras silogísticas, principalmente à primeira figura, elas não podem ser consideradas provas causais, de modo que elas devem apresentar elementos não analíticos.

Esse é um resultado igualmente encontrado por Kant. Mas diferentemente de Pereyra, Kant não considera que a não analiticidade das demonstrações euclidianas seja uma falha, a ponto de comprometer a certeza matemática, como Pereyra pretendeu que fosse. Para Silva, se substituirmos no corpo da demonstração feita por Aristóteles do conhecido teorema angular de Tales a verificação empírica pela verificação na intuição pura teremos a análise de Kant da mesma demonstração (cf. DA SILVA, 2007, p. 48). A segunda objeção repousa sobre o método da superposição utilizado por Euclides para demonstrar várias proposições. Tal método não pode se adequar à geometria por possuir algo de mecânico. E é assim porque a superposição implica um deslocamento ou um movimento de objetos a serem superpostos. Embora isso possa ser assumida na aplicação, não pode figurar como uma operação geométrica. Essa objeção, que deseja afastar qualquer recurso ao movimento na geometria, tem nuances platônicas, já que a tradição aristotélica contém explícitas declarações dos efeitos que a geometria abstrai a partir do movimento e da matéria (cf. MANCOSU, 1996, p. 29-30). É por volta de 1660 que a noção de geração de magnitudes geométricas pelo movimento aparece no contexto das discussões epistemológicas sobre a natureza das definições. É claro que o uso do movimento nas definições e investigações dos objetos matemáticos pode ser encontrado desde os antigos. Nos *Elementos*, Euclides apela ao movimento em um sentido explícito de deslocamento na geração de certas figuras, como, por exemplo, nos Livro XI, definição 14, onde uma esfera é definida como sendo gerada pela rotação de um semicírculo, ou mesmo nas definições 18 e 21 do mesmo livro onde o cone e o cilindro são gerados pela rotação de um triângulo e de um paralelogramo respectivamente (cf. MANCOSU, 1996, p 94). Essa concepção é de origem pitagórica e pode ser encontrada por toda a história da filosofia e da matemática desde Cusa até Newton. Mas é justamente no séc. XVII que a importância do movimento que até então era relativo ao problema da geração e a composição do contínuo torna-se uma efetiva ferramenta para o cálculo de volumes e tangentes (cf. MANCOSU, 1996, p 94-5).

Mais uma vez, o que foi considerado um grave problema a afetar a certeza matemática e seu estatuto de ciência aristotélica, ganhou nova importância com Kant. A característica cinemática da geometria, mesmo para os primeiros antigos como vimos acima, era considerada constitutiva da geometria, embora Pereyra a tenha apontado como elemento externo a geometria. Seguindo a técnica do séc. XVII, Kant sublinhou a importância fundamental do movimento dos pontos na geração das linhas e destas na geração das figuras, como Euclides o compreendia na construção das magnitudes.

2. Provas por contradição e provas diretas

Outra importante característica da certeza matemática pode ser encontrada na análise de suas provas. Kant destaca a diferença entre as provas desenvolvidas na matemática e as provas desenvolvidas pela Filosofia Transcendental. Essa diferenciação na doutrina kantiana do método tem como alvo a pretensão dogmática de utilizar o método matemático no transcurso das provas metafísicas. Kant está preocupado com o método apresentado pela tradição leibniziana transmitida por Wollf.

A questão começa com a oposição entre provas apagógicas e provas diretas. As apagógicas são as provas por contradição (*reductio ad absurdum*, *reductio ad impossibili*, *reductio ad incommodum*, todas consideradas como sinônimos). Minimamente, esse tipo de prova consiste de uma prova que começa por assumir como premissa a negação da proposição que se deseja provar. A partir dessa premissa, deriva-se uma falsidade manifesta ou uma contradição. Segue-se, então, a necessidade da proposição que se desejava provar. A prova direta ou ostensiva (aquela que não é apagógica), por sua vez, não parte de uma suposição que posteriormente seria negada; a conclusão é provada diretamente.

Essa distinção entre prova apagógica e prova direta relativa à demonstração matemática, que igualmente aparece na Doutrina do Método da primeira *Crítica*, pode ser encontrada na tradição aristotélica. Mas o novo na abordagem kantiana é a "utilização da distinção entre provas ostensivas [ou diretas] e apagógicas como uma característica que separa filosofia e matemática." (MANCOSU, 1996, p 107.).

É claro que a diferença nos tipos de provas não é suficiente para estabelecer a separação entre filosofia e matemática. A essa primeira diferença deverá se somar outra relativa à forma como cada uma, matemática e filosofia, estabelecem seus conceitos. Adiante veremos que a matemática tem um método peculiar para estabelecer seus conceitos, a construção na intuição pura. E é justamente esse método de construção de conceitos que possibilita a afirmação de uma das principais teses kantianas. Nessa tese a lei do terceiro excluído, subjacente a qualquer aplicação da redução, é possível apenas para "entidades" construídas. Isso porque somente a construção dos conceitos garante que no processo de predicar propriedade de uma entidade, não sejamos levados a cometer o erro de predicar propriedade de não entidades, o que subverteria as condições para uma correta aplicação das reduções. Portanto são, justamente, os pressupostos construtivistas da filosofia da matemática kantiana que garantem que a redução seja um tipo de prova exclusivamente matemática (cf. MANCOSU, 1996, p. 108).

É na quarta sessão da Doutrina Transcendental do Método, “A Disciplina da Razão Pura com Respeito às suas Provas”, que Kant estabelece a característica fundamental das provas de proposições sintéticas e transcendentais. Nesse tipo de prova a “razão não pode voltar-se diretamente para o objeto mediante seus conceitos” (A782/B810), deve antes evidenciar a validade objetiva dos conceitos e a possibilidade de sua síntese. Isso não constitui uma mera regra de prudência, “mas concerne à própria essência e possibilidade das provas” (A782/B810).

Se na prova devemos ultrapassar o conceito a priori, isso não pode ser feito sem um fio condutor, que no caso da matemática, onde a síntese é conduzida pela intuição a priori, a própria intuição pura, e as conclusões podem ser derivadas dela imediatamente. Mas, no caso em que as provas estão às voltas com os conceitos do entendimento, no caso do conhecimento transcendental, o fio condutor deve ser a experiência possível (cf. A782-3/B810-1). Aqui, a prova não deve mostrar que um conceito dado conduz a outro. Isso incluiria um salto que não pode ser justificado. Antes a prova deve mostrar que a própria experiência e, consequentemente, o objeto da experiência não seria possível sem tal conexão.

Mas o que dizer quando se pretende provar uma asserção da razão pura, ou ainda, quando se pretende ultrapassar os conceitos da experiência mediante uma ideia pura? Neste caso Kant afirma a necessidade de uma condição necessária da força demonstrativa que seja inerente à prova. Como exemplo, Kant expõe a prova sobre a simplicidade da substância pensante. Ele apresenta três regras para estabelecer provas transcendentais.

A primeira regra é refletir antes de empreender uma prova ou, antes de avaliar as provas já existentes sobre a origem dos princípios sobre os quais a prova deve ser (ou foi) erigida (cf. A786/B814).

A segunda regra é que “para cada proposição transcendental pode ser encontrada apenas uma única prova” (A787/B815). Como comparação, Kant alude à prova que parte da intuição como na matemática e na ciência empírica. Nesses dois casos, várias provas podem ser encontradas para uma mesma intuição, porque a intuição fornece um material variado para as proposições sintéticas, de modo que é possível conectar esse material de inúmeras maneiras podendo atingir a proposição por diversos caminhos que partem de um mesmo ponto, a intuição. Mas esse não pode ser o caso para as proposições transcendentais.

Como cada proposição transcendental parte exclusivamente de um único conceito e expressa a possibilidade do objeto segundo esse conceito, o argumento deve ser único, visto que fora do conceito não existe mais nada que possa determinar o objeto. De modo que a “prova nada mais pode conter do que a determinação de um objeto em geral segundo este conceito” (A788/B816).

Mas é na terceira regra que Kant estabelece aquela distinção entre provas diretas e apagógicas, ligando-as respectivamente a prova transcendental e a prova matemática. A terceira regra estabelece que as demonstrações contidas nas provas transcendentais devem ser ostensivas (diretas) e não apagógicas. Vejamos por que isso deve ser assim.

Kant afirma que em toda espécie de conhecimento as provas diretas ou ostensivas combinam “a convicção da verdade com o conhecimento de suas fontes" (A789/B817). Dessa forma temos a primeira regra garantida e respeitada, a saber, a reflexão sobre a origem dos princípios. Em contrapartida, as demonstrações apagógicas podem produzir a certeza, mas de forma alguma podem produzir a "compreensibilidade da verdade no tocante à sua interconexão com os fundamentos da sua possibilidade" (A789-790/B817-8).

Explicados os motivos pelos quais as provas ostensivas são as únicas adequadas a satisfazer todos os propósitos da razão, Kant se preocupa em explicar por que, a despeito da deficiência por ele apontada, as provas apagógicas são correntemente usadas nas diversas ciências. Ele supõe que esse tipo de procedimento pode ser vantajoso quando as razões pelas quais se deve derivar o conhecimento são demasiadamente numerosas ou ocultas. Em casos como esse, pode ser esclarecedor alcançar o conhecimento através de suas consequências (cf. A790/B818).

Para alcançar tal conhecimento, poderiam talvez ser empregados o *modus ponens* e *modus tollens*. O primeiro se apresenta impraticável porque inferir por meio dele a verdade de um conhecimento com base na verdade de suas consequências só seria possível no caso de todas as consequências serem verdadeiras. Mas percorrer todas as consequências de uma proposição aceita é algo impossível para um conhecimento finito como o nosso. Por outro lado, o *modus tollens* pelo qual se prova a falsidade da proposição a partir de uma única consequência falsa configura um método de prova não apenas completamente rigoroso, mas extremamente fácil (cf. A791/B819). Assim, a prova apagógica, que descobre uma única consequência falsa decorrente da negação da proposição que se pretende provar, garante a falsidade da proposição contraditória e, portanto, a verdade da proposição em questão.

Se esse tipo de prova guarda total rigor e pode ser estabelecida com tanta facilidade, porque ela não poderia ser utilizada nas provas das proposições transcendentais? Kant afirma que ela apenas funciona como prova rigorosa nas ciências em que se mostre ser impossível "que aquilo que é subjetivo em nossas representações *substitua enganosamente* aquilo que é objetivo" (A791/B819). Mas onde essa substituição, além de ser possível, é predominante, ocorre que ou a contradição diz respeito apenas às condições subjetivas do pensamento e não ao objeto ou as proposições se contradizem mutuamente com base numa condição subjetiva, que é falsamente considerada objetiva. A matemática é o lugar onde essa substituição é impossível. Portanto, as provas apagógicas têm nela seu lugar próprio. Mas, na filosofia transcendental, onde as provas se dão em meio à própria ilusão dialética – na qual o subjetivo se impõe como objetivo à razão – é impossível apresentar provas mediante a refutação do contraditório.

No caso das Antinomias matemáticas, isto é, as duas primeiras Antinomias que derivam do uso ilegítimo das categorias matemáticas de quantidade e a de qualidade, a refutação das posições contrárias não é capaz de fazer emergir a ilusão subjacente. Visto que Kant assume uma posição idealista transcendental a respeito do espaço e tempo, sua solução é dizer que o espaço e o tempo não são totalidade completas (infinitas): "(...) o regresso na série dos fenômenos cósmicos, enquanto uma determinação da magnitude do mundo, se estende *in indefinitum*". Isso equivale a dizer que o mundo dos sentidos não possui uma magnitude absoluta, mas sim que o regresso empírico (exclusivamente mediante o qual ela pode ser dada ao lado de suas condições) tem sua regra, qual seja, a de "sempre progredir de cada um dos membros da série, enquanto condicionado, para um ainda mais remoto" (A521/B549) Dessa forma seria inapropriado tentar atribuir qualquer magnitude determinada a suas extensões (cf. A522/B550). Igualmente ele nega que eles possam ser pensados como sendo atualmente infinitamente divididas (compostos de ou infinitesimais ou pontos) (cf. A526/B554). É claro que todas as infinitas partes do espaço podem ser pensadas como contidas nele, mas a partitura inteira não está ali porque ela depende da decomposição progressiva, ou do procedimento de limitação das partes no todo (cf. B358).

Kant mostra que a tese e a antítese presentes nas Antinomias da Razão não são propriamente contradições, num sentido lógico, por conseguinte analítico. Elas devem ser antes contraposições dialéticas.

> "Quando digo, pois: o mundo, quanto ao espaço, é infinito ou não é infinito (*non est infinitus*), se a primeira proposição é falsa, deve ser verdadeiro o seu oposto contraditório, a saber, o mundo não é infinito. Deste modo só suprimiria um mundo infinito mas não poria outro, ou seja, o finito. Porém, se disser que o mundo é ou infinito ou finito (não-infinito) poderiam ambas ser falsas. Com efeito, vejo então o mundo determinado em si próprio, quanto à grandeza, porque na proposição oposta não só suprimo simplesmente a infinitude e, conjuntamente, talvez toda a sua existência própria, mas também acrescento uma determinação ao mundo como a uma coisa real em si mesma, o que pode ser igualmente falso, se na verdade o mundo não devesse de modo algum ser dado *enquanto coisa em si* e, por conseguinte, nem como infinito nem como finito quanto à grandeza. Permita-se-me que dê o nome de *oposição dialética a* esta oposição e o de *oposição analítica* à que consiste na contradição. Assim, dois juízos, dialeticamente opostos entre si, podem ser ambos falsos porque não só se contradizem, mas um deles diz mais do que é necessário para a contradição." (A504/B532)

Por tudo o que foi dito acima, Kant pode dizer que a proposição "O todo de todas as condições no espaço e no tempo é incondicionado" é falsa. Pois, se todas as coisas são condicionadas no (interior do) espaço e tempo, nenhum todo é possível. Portanto, aqueles que admitem um todo absoluto de simples condições condicionadas contradizem a si mesmos, quer eles considerem esse todo como limitado (finito), quer eles considerem como ilimitado (infinito) e, entretanto, o espaço deve ser visto como um tal todo, assim como o tempo passado (cf. LEBRUN, 1993, p 115-6).

Terceiro Capitulo: Construção na intuição pura

Por ser a intuição uma das principais formas de cognição, e por ser a matemática o exemplo canônico de ciência para Kant – uma vez que ostenta o único corpo de conhecimento no qual a consciência de sua necessidade acompanha imediatamente suas proposições –, no que segue, nos concentraremos em compreender o método peculiar que Kant atribui à matemática.

A questão abordada nos *Prolegômenos* e que nos importa aqui é justamente a que encontramos no parágrafo 6: como é possível a matemática pura? É claro que a pergunta kantiana tem seu lugar no campo da possibilidade, porque a realidade das ciências como corpo de conhecimento é dada. A matemática no tempo de Kant vai muito bem[3], de modo que perguntar se ela é possível parece uma pergunta sem sentido. O que importa então é saber *como* ela é possível. Isso porque, para Kant, a "possibilidade da matemática deve ser demonstrada na filosofia transcendental" (A733/B762), e para tal é necessário primeiro investigar como um *conhecimento* como o da matemática é possível.

Kant pretende tratar do conhecimento matemático como um todo, mas os exemplos de proposições matemáticas restringem-se a proposições da geometria e da aritmética. De uma forma geral, a matemática para Kant é a ciência de tudo o que pode ser mensurado. Na primeira *Crítica* durante a Exposição Transcendental, Kant apresenta a Geometria, entendida como um

3 A crise nos fundamentos da matemática virá mais tarde com os paradoxos de Russell.

corpo de conhecimento sintético a priori, como condição para que o espaço enquanto intuição pura seja a forma da sensibilidade humana. No texto dos *Prolegômenos*, a relação lógica entre geometria e espaço enquanto intuição pura aparece invertida, de modo que a condição para que a Geometria, e por consequência o conhecimento matemático seja da forma como ele é, é justamente o fato de que os conceitos matemáticos devem ser construídos na intuição.

Se observarmos atentamente, veremos que todos os exemplos de axiomas geométricos a que Kant se refere são axiomas que se agrupados descrevem obrigatoriamente o espaço métrico euclidiano. Ora, podemos aqui listar esses axiomas: “entre dois pontos não pode haver mais que uma linha reta”, “duas linhas retas não encerram um espaço”, “três pontos estão situados em um plano”, “a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois retos” e ainda “descrever um círculo com raio dado com centro em um ponto qualquer do plano”. Isso torna claro que, embora Kant não afirme textualmente, a Geometria que ele estabelece como paradigma do conhecimento matemático é exclusivamente a geometria euclidiana (cf. LORENZO, 1992, p 11-5). No que segue veremos que esse não é o único indício da geometria com a qual ele lida. O fato de que durante a caracterização do método matemático, em contraste com o filosófico, Kant recorra à análise das provas padrão euclidianas, é outro indício.

Nesse capítulo, pretendemos mostrar que, por tudo que vimos, é notório que a Geometria euclidiana estabelece um processo construtivo que desempenha um papel fundamental em suas provas. Esse processo imprime à prova sua característica intuitiva. A axiomatização do conhecimento geométrico empreendida por Euclides exige esse processo intuitivo. A compreensão contemporânea de axiomatização aponta para esse processo como uma falha. Veremos a seguir que essa necessidade da intuição tem origem no que os contemporâneos afirmam ser uma ausência de axiomas importantes que garantiriam elementos que Euclides fornece através desse processo intuitivo, o axioma da continuidade e os conceitos gerais de infinidade e densidade são os principais. Resolver essas questões da axiomatização não é um problema para a filosofia kantiana, já que, para Kant, o processo intuitivo é justamente a garantia do conhecimento que é sintético, e por isso pode ir além dos conceitos, e ainda proceder com completa universalidade e apoditicidade, assim como o conhecimento geométrico procede segundo a axiomatização proposta por Euclides.

Tudo parece, então, resumir-se a um processo construtivo por régua e compasso, potencializado pela capacidade humana de iteratividade. Mas o que pretendemos mostrar é que Kant dá um passo a mais. Embora não tenha a intenção de corrigir a axiomatização euclidiana, ele deve retificar as garantias pressupostas para a universalidade e a apoditicidade que reconhece nas proposições geométricas. Para isso, ele qualifica esse processo construtivo esclarecendo o meio pelo qual a construção deve ser realizada. O processo de construção que fundamenta o conhecimento matemático deixa de ser assim simplesmente o processo de construção com régua e compasso – que obrigatoriamente precisa de um meio que deve ser empírico – para posicionar-se na intuição pura.

Se nossa argumentação for bem sucedida, perceberemos que a relação entre geometria e intuição pura pode ser ainda mais profunda do que simplesmente subscrever a axiomatização euclidiana. A construção na intuição pura dos conceitos geométricos é justamente o processo que nos permite estabelecer as propriedades desse espaço que não pode de forma alguma ser empiricamente intuído, mas que ao mesmo tempo acompanha toda a representação dos fenômenos externos. No que segue, pretenderemos mostrar que os axiomas da geometria euclidiana, pelo simples fato de serem os únicos que podem ser construídos imediatamente na intuição pura, apresentam as condições de possibilidade da existência dos fenômenos externos.

Limitando-se às circunstâncias do sujeito, Kant passa a fundamentar o método matemático não mais na construção euclidiana e sim na sua construção na intuição pura. É justamente esse passo dado por Kant que está na origem das duas principais objeções levantadas ao longo do séc. XX à sua filosofia da matemática. Primeiro, muitos sustentarão que os juízos da matemática, em última análise não são sintéticos. Segundo, Kant em nada contribuiu para a matemática enquanto ciência porque a limitou segundo as necessidades de seu projeto filosófico e, desse modo, ignorou alguns avanços nas descobertas matemáticas e simplesmente recusou-se a dar assentimento a outros[4].

4 "[A] natureza do conhecimento matemático é um dos pontos de partida da filosofia kantiana, mas no fim cabe a essa filosofia restringir práticas e métodos matemáticos já de há muito estabelecidos. (...) Kant tratava a matemática, que em nada ajudou a enriquecer, a partir de um projeto filosófico" (DA SILVA, 2007, p, 87). O direito de criar conceitos matemáticos apenas sob a condição de serem consistentes, direito que hoje é considerado inalienável dos matemáticos, foi negado por Kant. E novamente a necessidade vinda da filosofia se impôs. Como observa Silva, "se esse direito fosse dado aos matemáticos, por que negá-lo aos metafísicos?" (DA SILVA, 2007, p, 107). Na primeira *Crítica* o próprio Kant afirma "mesmo o matemático, (...) não pode repelir as advertências da filosofia, nem colocar-se acima dela" (A727/B755).

1. A axiomatização incompleta de Euclides: continuidade e divisibilidade infinita.

O conhecimento matemático sem dúvida é, para Kant, ao menos nos *Prolegômenos* e na primeira *Crítica*, um conhecimento que comporta necessidade absoluta. Possuidor de certeza apodítica, não se apoia em nenhum fundamento empírico, embora seus juízos sejam completamente sintéticos. A matemática representa seus conceitos na intuição sempre a priori, consequentemente numa intuição que não deve ser empírica, mas pura.

O caminho que seguiremos para tornar explícita a compreensão da matemática para Kant foi inteiramente projetado por Michael Friedman principalmente (mas não exclusivamente) no texto *Kant and the Exact Sciences* (1992).

Nos *Prolegômenos*, que, segundo a maioria dos comentadores, é o texto que apresenta a compreensão de Kant sobre a matemática em sua forma mais completa, mesmo que não seja a mais profunda tal como encontrada na primeira *Crítica*, nos deparamos com o que Kant chama de primeira condição de possibilidade da matemática, a *construção na intuição pura*.

Na *Crítica,* a explicitação do método matemático é encontrada na Primeira Seção da "Doutrina Transcendental do Método", mais precisamente na "Disciplina da Razão Pura no uso Dogmático"[5]. Iniciaremos nossa análise dessa seção – assim como fez Friedman – pela passagem que vai de A715/B743 a A717/B7456. [6]

---

5 No que segue todas as referências a "Disciplina da Razão Pura no Uso Dogmático" aparecerá apenas como "Disciplina".

6 . Essa passagem analisada por Friedman é imediatamente anterior àquela que Shabel chama de obscura, com a qual deve ser confrontada a concepção de construção na intuição pura. Esse confronto proposto por Shabel é necessário porque nas passagens a que ela se

Dessa passagem, depreendem-se afirmações sobre a natureza do raciocino matemático e sobre a natureza da prova matemática. Aqui, raciocínio e prova, obviamente encontram-se ligados. A prova garante a correção do raciocínio. E, como veremos, a característica da prova incide diretamente no tipo de raciocínio gerado pelo método. Tendo em vista que os juízos matemáticos são todos sintéticos, o raciocínio matemático não pode "proceder analiticamente de acordo com conceitos" como ocorre com o raciocínio filosófico. Portanto o processo pelo qual é construído não pode ser puramente lógico[7]. Sendo assim sua prova neste tipo de raciocínio deve exigir algo a mais. Esse algo é caracterizado por Kant como uma *atividade* chamada "construção na intuição pura".

Como vimos acima, a Estética Transcendental – primeira parte da *Crítica da Razão Pura* – mostrou que as únicas intuições possíveis para a sensibilidade humana são o espaço e o tempo; estabeleceu a natureza epistêmica dessas intuições, e ainda de suas naturezas ontológicas de idealidade, a condição de forma da sensibilidade humana. Do confronto entre raciocínio/prova matemáticos e raciocínio/prova filosóficos, Kant extrai a principal condição de possibilidade da matemática, definida como o seu exclusivo método de prova, a "construção na intuição pura". Se as construções

refere em seu texto, retiradas da "Disciplina" em A717/B745 até A734/B762, Kant está estabelecendo a diferenciação entre raciocínio matemático e raciocínio filosófico. Nesse momento, ele lança mão de uma segunda distinção, essa interpretada pelos comentadores como uma distinção de natureza entre a construção simbólica (relativa a álgebra) e a construção geométrica ou ostensiva (relativa a aritmética e a geometria). Para Shabel, acreditar em uma distinção de natureza entre esses dois gêneros de construção é um equivoco. Kant não pode estar distinguindo construção simbólica e geométrica. Antes, ele apenas deve estar descrevendo o processo de simbolização da construção ostensiva (cf. SHABEL, 1998).

7 Na Introdução da segunda edição da *Crítica da Razão Pura*, em B14 a B19, ele explica por que a matemática não pode proceder analiticamente, e afirma que a matemática, assim como todas as ciências teóricas da razão, possui (e no caso da metafísica devem ser procurados) juízos sintéticos a priori como princípios.

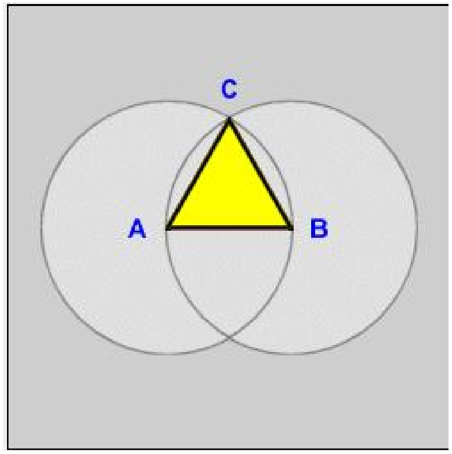
são atividades realizadas nas intuições puras do espaço e do tempo, as proposições matemáticas da geometria e da aritmética são as únicas proposições construídas ou passíveis de construção.

Na passagem que tomamos como paradigmática (A715/B743 a A717/B745), Kant descreve, na intenção de caracterizar o raciocínio matemático, a prova euclidiana padrão da proposição de que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º. Na discussão que acompanha essa prova, Kant afirma que a construção na intuição pura é essencial para essa prova. Disso resultam e dessa forma Kant acaba fazendo duas declarações, embora não textuais, que parecem estranhas hoje, dada nossa concepção formal de prova. São elas: i) a *figura desenhada é necessariamente a prova*. Sem as linhas a prova não se realiza. Assim, *provas geométricas são, elas mesmas, objetos espaciais*. ii) *as linhas* em questão são efetivamente desenhadas ou *continuamente geradas*. Portanto, as provas não são somente espaciais, mas *espaço temporais também* (cf. FRIEDMAN, 1992, p 57). Caberia já perguntar por que a construção na intuição pura é necessária e constituinte da prova geométrica padrão euclidiana na concepção de Kant? Tomemos a prova apresentada para a Primeira Proposição 1 do Livro I dos *Elementos* de Euclides, e vejamos como ela aparece (ver fig 2).

Prop. I. 1:osição I:

Sôbre uma linha reta finita descrever um triângulo equilátero

Seja AB uma linha reta finita. Dessa forma é exigido a construção de um triângulo equilátero sobre a linha reta AB.



Com o centro A, e com distância AB, permita que o círculo BCD seja descrito [Postulado 3]
Novamente, com o centro B e distância BA, permita que o círculo ACE seja descrito. [Postulado 3]
E a partir do ponto C, onde os círculos se cortam reciprocamente, dos pontos A e B permita que as linhas retas CA e CB sejam unidas. [Postulado 1]
Agora, uma vez que o ponto A é o centro do círculo BCD, AC é igual a AB [Definição 15].
Novamente, uma vez que o ponto B é o centro do círculo CAE, BC será igual a BA [Definição 15].
Mas CA também foi provada igual a AB. Então, cada uma das linhas retas CA e CB são iguais a AB. E coisas que são iguais as mesmas coisas são também iguais a uma outra; [Noção Comum 1].
Então, as três linhas retas CA, AB e BC são iguais umas as outras.
Consequentemente, o triângulo ABC é equilátero; e foi construído (**e continua sendo**) sobre uma linha reta finita AB. (Criando) o que foi exigido. (HEATH, T. L. Proposição I, Livro I. p. 241)

A principal objeção a essa prova é justamente o fato de que Euclides não prova a existência do ponto C. A prova pressupõe que o ponto deve existir necessariamente onde ocorre a intersecção entre os círculos, ali o ponto deve existir necessariamente. Mas Euclides, ao menos durante a prova, não apresenta nenhuma garantia de que naquela intersecção particular deverá haver um ponto – e apenas um ponto. Como vimos acima na demonstração da proposição, cada passo da prova encontra-se apoiado em um postulado ou axioma que encontramos na axiomatização de Euclides. Mas o problema permanece: são esses axiomas e postulados suficientes para garantir a existência dos pontos que não seguem diretamente deles? Vejamos como esse problema foi discutido e como Kant pretende tê-lo resolvido.

Heath (1968), em seu comentário aos *Elementos* de Euclides, discute o problema da existência dos pontos. Ele afirma que a construção efetiva é utilizada nos *Elementos* como método para provar a existência das figuras com certas propriedades. Segundo ele, a construção é efetuada por meio de linhas e círculos. É importante lembrar que essa construção citada por Heath não é ainda a "construção na intuição pura" afirmada por Kant como método da matemática. Essas linhas da construção euclidiana são desenhadas de acordo com os postulados 1 a 3.[8]. A essência desses postulados, segundo Heath, é que essas linhas e círculos construídos com base neles determinam em suas intersecções outros pontos em adição àqueles já dados. Os novos pontos são utilizados para determinar novas linhas etc.. Sendo assim, a *existência* desses novos pontos deve ser postulada ou provada em conformidade com a postulação ou a prova das linhas e círculos que os determinam.

Friedman também compreende o processo de construção como estritamente dependente das operações realizadas com base nos três postulados. Mas para Friedman essas operações fazem mais do que simplesmente garantir a existência de pontos a partir de suas próprias condições de postulados; elas dão as regras para o processo *iterativo*, e os pontos necessários do modelo euclidiano são os pontos que podem ser assim construídos mediante um processo de acrescentar ponto a ponto. Iterativo é o processo que se repete diversas vezes para se chegar a um resultado e a cada

8 Postulado 1: desenhar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto; Postulado 2: produzir uma linha reta finita continuamente em uma linha reta; Postulado 3: descrever um circulo com qualquer centro e distância.

vez gera um resultado parcial que será usado na vez seguinte. Tomando como base o padrão de formalização estabelecido por Frege e Russell, é recorrente acusação de que a axiomatização euclidiana, se realizada exclusivamente a partir dos axiomas e postulados acima listados, não pode garantir a existência de uma infinidade de pontos. Da axiomatização de Euclides, apenas pode-se demonstrar a existência necessária de dois e somente dois pontos. Mas as proposições da geometria tais como a da Prop. I exigem uma infinidade de pontos. Friedman acredita que essa *infinidade do conjunto desses pontos* é garantida pela capacidade humana de *contínua iteratividade do processo de construção* conduzido com base nos postulados que regem esse processo construtivo.

Ainda para Heath, não existe um postulado nos *Elementos* que imponha uma infinidade de pontos. É um fato inegável que um postulado ou axioma como o da continuidade não figura entre os princípios euclidianos. Em grande medida, a existência de quantidades contínuas ou infinitas na geometria euclidiana encontra-se restrita ao processo de construção, de modo que a existência de uma infinidade de pontos ou de uma séria densa de pontos, por exemplo, torna-se estritamente dependente de uma atividade levada a cabo pelo sujeito. Com Heath, vemos que a objeção a prova a que nos referimos acima, e consequentemente a objeção ao processo intuitivo necessário à axiomatização de Euclides pode ser um problema se analisado pela ótica do padrão de formalização estabelecido por Frege e Russell. Mas o tipo de lógica que subjaz ao formalismo matemático contemporâneo não é a mesma lógica que se encontra a disposição de Kant e, antes ainda, do próprio Euclides.

É claro que a formulação moderna da geometria euclidiana, que entende que uma axiomatização rigorosa deve proceder analiticamente, tem recursos axiomáticos mais adequados para lidar com o problema da possibilidade de não intersecção, mediante a postulação de um axioma da *continuidade*. Como vimos, esse postulado é externo aos axiomas e postulados de Euclides, de forma que a existência do ponto C não segue dos axiomas. Por isso *postular* o axioma da continuidade é uma forma, na concepção moderna, de resolver o problema da não intersecção, i.e, da existência não necessária do ponto C.

Uma alternativa, eximindo-nos da postulação de um axioma alheio aos axiomas do próprio sistema euclidiano, seria, então, afirmar que embora o axioma da continuidade não figure explicitamente no sistema euclidiano, ele aparece de forma implícita no Postulado 2, onde se lê que um segmento de linha reta pode ser produzido *continuamente*[9]. Mas essa alternativa falha porque essa noção de continuidade que aparece no Postulado 2 não é nem igual a noção moderna de continuidade, nem é logicamente analisável, visto que ela apenas aparece como um predicado simples. Essa noção intuitiva que figura no Postulado 2 não difere da mera noção de densidade. Pois para Euclides, explicar o que significa continuidade era o mesmo que definir densidade, ou seja, fornecer descrições como "para todo elemento, existe um menor" ou "entre cada dois elementos, existe um terceiro".

Essa compreensão do conceito de continuidade vai além do que Heath mostra ser a compreensão desse postulado. Muitas foram as tentativas

---

9 Postulado 2, Livro I, "Produzir continuamente uma linha reta finita em uma linha reta.". (HEATH, 1968, p 196)

de provar esse postulado, mas todas o tomam exclusivamente como afirmando que “duas linhas retas não podem ter um mesmo segmento comum”. Como dissemos acima, da discussão dessa proposição segue o fato de que a “axiomatização de Euclides não implica a existência de mais que dois pontos”. (FRIEDMAN, 1992, p 61) Portanto, a prova da primeira proposição permanece problemática e, assim, ao sistema euclidiano restam duas alternativas: ou podemos nos apegar a compreensão clássica do problema da axiomatização euclidiana afirmando que o processo intuitivo inerente às provas e regido pelo conteúdo dos postulados é suficiente para garantir que a geração iterativa do conjunto infinito de pontos necessários às provas, ou podemos considerar o sistema euclidiano como axiomaticamente deficiente.

2. A representação intuitiva da divisibilidade infinita

Mas conceber o sistema euclidiano como um sistema deficiente é um dos equívocos gerados pelo anacronismo presente nos juízos em cuja base está a lógica moderna. Um próximo passo para evitar esse tipo de anacronismo poderia ser, então, admitir que o sistema euclidiano não é um sistema em nosso sentido. Nele, a existência dos pontos necessários não é logicamente dedutível de axiomas existenciais apropriados. Eles poderiam ser, ao contrário, gerados a partir de um processo de construção, o *processo de construção com régua e compasso*. Para Friedman, certamente, foi esse o caminho trilhado por Kant e do qual resultou a noção central da sua filosofia da matemática, a saber, a noção de construção na intuição pura. Dessa perspectiva, certos fatos matemáticos – tais como seriam a densidade ou a polêmica divisibilidade infinita de uma linha dada – somente poderiam ser representados como outro fato definido agora sobre as nossas capacidades intuitivas. Por tudo isso, podemos agora responder a pergunta que fizemos acima: por que a construção na intuição pura é necessária e constituinte da prova geométrica euclidiana padrão?

Como vimos, a prova euclidiana necessita sempre da garantia da existência de pontos além daqueles que ela garante existir exclusivamente por seus próprios axiomas. Euclides não forneceu nenhum axioma ou postulado que garantisse uma infinidade de pontos, nem ao menos que as linhas fossem grandezas contínuas. Mas, para provar as proposições geométricas, nos são exigidos axiomas ou recursos axiomáticos equivalentes que assegurem ambas as propriedades. Decerto, Euclides não necessitava deles porque seu método de provar as proposições, o método da construção, fundamentado na capacidade intuitiva do ser humano fornecia a garantia da existência dos pontos. Por esse método, o ato mesmo da construção acrescenta cada ponto à percepção imediata, de maneira sucessiva *in indefinitum*. Aquele geômetra que "vê" o ponto poderia negar a ele sua existência? Poderia duvidar da sua existência? Não. Mas por que não há entre os axiomas de Euclides um axioma da continuidade? Seria por que ele possuía um método considerado suficiente para responder as questões de existência na matemática? Provavelmente, não. Ele necessitava – e Kant mostrou isso – da construção e, portanto, de um substrato intuitivo, porque os conceitos (em suas funções lógicas) de que dispunha não eram suficientes para determinar a divisibilidade infinita.

A questão que segue é: todavia, ainda que Euclides dispusesse desses recursos conceituais e axiomáticos, por que o conhecimento conceitual permaneceria inadequado à geometria? É esse ponto que Kant esclarece em

B40. Para conferir à representação do espaço sua característica intuitiva, é necessário antes demonstrar o fato de que o espaço – assim como mostra a geometria – consiste de um número infinito de partes, e não apenas de que ele é constituído de partes, de modo que todas as partes do espaço existem simultaneamente *in infinitum*.

> O espaço é representado como uma grandeza infinita dada. Ora, não há dúvida que pensamos necessariamente qualquer quer conceito como uma representação contida numa multidão infinita de representações diferentes possíveis (como sua característica comum), por conseguinte, subsumindo-as; porém, nenhum conceito, enquanto tal, pode ser pensado como se encerrasse *em si* uma infinidade de representações. Todavia é assim que o espaço é pensado (pois todas as partes do espaço existem simultaneamente no espaço infinito). Portanto, a representação originária de espaço é *intuição a priori* e não conceito. (B40)

Como vimos no primeiro capítulo, essa é a passagem que conclui o argumento da característica *intuitiva* da nossa representação do espaço. Vejamos, agora, como essa passagem pode ser importante para compreender a inadequação de atribuir uma natureza meramente conceitual aos objetos do conhecimento matemático. O argumento da Exposição Metafísica começa afirmando que o espaço é um indivíduo singular e não um conceito. Depois, ele afirma a coexistência do espaço como conceito geral e como individuo singular, porém dá prioridade ao último. E apela, em seguida, ao conhecimento da geometria. O ponto aqui é que, se for mostrado que o conhecimento geométrico é intuitivo e não conceitual, estará mostrada a inadequação do conceito geral de espaço e a prioridade da intuição singular. Mas como isso é possível?

Devemos lembrar que na passagem B40, extensão e intensão do conceito é a distinção subjacente. Vejamos essa distinção mais de perto.

Afirmar que o espaço é um individuo singular é o mesmo que dizer que os vários espaços são relativos a ele como são as partes relativas a um indivíduo completo. Mas ao mesmo tempo, Kant sustenta a coexistência de um espaço como conceito geral, no qual os espaços particulares são instâncias. A prioridade do espaço como indivíduo singular sobre o espaço como conceito geral está sustentada no fato de que é impossível encontrar o espaço como individuo singular partindo de outros conceitos particulares que possam satisfazer a variável em proposições da forma “x é um espaço” ou, dito de outro modo, articulando o espaço individual a partir de espaços diversos. Ao contrário, a única forma de encontrar o conceito geral é por meio do ato intuitivo de “cortar” partes no espaço indivíduo singular. Portanto, a possibilidade de um conceito geral de espaço e de um conceito de espaços particulares possíveis depende estritamente do processo intuitivo de “limitação” (cf. FRIEDMAN, 1992, p 69).

Para sustentar essa prioridade do espaço como individuo singular Kant argumenta como expus acima, sugerindo ser indispensável o apelo à geometria, a quem caberia determinar o espaço como divisível numa sequência potencialmente infinita de partes cada vez menores. No argumento de B40 Kant pretende ter mostrado que o mero conceito não pode capturar essa característica essencial da representação do espaço (FRIEDMAN, 1992, p 70).

Portanto, a necessidade de um processo construtivo intuitivo (limitação) é o motivo pelo qual Kant dá prioridade a intuição singular do espaço.

Para que fique ainda mais claro o caráter intuitivo da axiomatização euclidiana e as diferenças que existem relativas à nossa compreensão do que seja axiomatizar uma teoria, vamos sumarizar o caminho trilhado até aqui.

A geometria euclidiana tem o processo de construção com régua e compasso como elemento principal de seu método. Um processo como esse explicita a característica intuitiva da axiomatização de Euclides. A marca dessa intuitividade é que ela depende da capacidade humana de proceder iterativamente a partir de regras. Esse processo de sucessiva iteração pode gerar uma infinidade de objetos, embora sempre uma infinidade possível e nunca numa infinidade atual. O processo de construção, entre outros objetivos, tem como finalidade gerar os pontos exigidos em determinadas provas geométricas, pontos esses que de outra forma não teriam suas existências garantidas, comprometendo a cadeia inferencial que constitui a prova.

Conforme já vimos, a forma moderna de resolver um problema como o da existência de determinados pontos seria introduzindo o axioma da continuidade no sistema euclidiano. Se os *Elementos* de Euclides apresentam o paradigma da axiomatização para Kant, introduzir um axioma seria o mesmo que negar sua efetividade. Mas, para ele, que tinha a matemática em conta como um conhecimento absolutamente certo, adicionar um axioma aos do próprio Euclides pareceria um contrassenso. De modo que Kant subscreve o método construtivo euclidiano.

O tipo de construção, tal como a de Euclides, com régua e compasso, é obviamente realizada na sensibilidade externa. É necessária a sucessiva iteração das três regras postuladas, (*desenhar* um segmento, *estendê-lo*, e *desenhar um círculo*), em um meio empírico, a folha de papel, a lousa, ou chão como fazia Sócrates (apenas para voltar aos antigos). Mas, dessa forma, a construção apenas garantiria o aspecto sintético dos juízos matemáticos, e imprimiriam às provas o caráter espaço temporal que de certa forma Kant também quer ver assegurado. Todavia, isso não contribui em nada para assegurar a esse tipo de construção seu aspecto a priori, que era igualmente caro a Kant, por ser distintivo do caráter universal e necessário do que por meio desse método se possa provar. E é justamente para garantir esse duplo aspecto – sintético e a priori – dos juízos de todas as ciências teóricas da razão pura e, por conseguinte, da matemática, que Kant mantém a *construção* intuitiva e iterativa, mas exige que sua realização seja exclusivamente dependente do sujeito, portanto numa intuição que é pura, e não empírica.

Restam ainda, à titulo de conclusão, alguns elementos que completam a compreensão da construção na intuição pura, fazendo-a convergir para a ideia intuitiva de movimento. O processo de construção com ferramentas euclidianas não consegue explorar os elementos cinemáticos essenciais para a concepção kantiana de intuição pura. Ele não faz nenhum apelo à ideia de geração das figuras, linhas etc., pelo movimento dos pontos. A questão que parece inevitável é, justamente, por que o movimento é essencial para a noção de intuição pura?

A matemática dos sécs. XVII e XVIII produziu um novo ramo da matemática, em estreita associação aos problemas do contínuo e do infinito matemático. O cálculo inifinitesimal de Leibniz e Newton vai além da geometria euclidiana, considerando curvas e figuras arbitrárias e fazendo um uso extensivo da operação de passagem ao *limite*. A ideia de convergência, termo pelo qual o ponto de vista moderno explica a operação básica de limite, pode ser apresentado usando as atuais fórmulas quantificacionais modernas. Mas, como já ficou claro, isso é inviável para Kant. A matemática de seu tempo, com a qual estava extremamente envolvido, exibia uma representação equivalente por meio da postulação de quantidade que são geradas por meio de um *movimento contínuo*. É possível representar a ideia de convergência ou de aproximação ao limite por um processo temporal, ou seja, a ideia de um ponto movendo ou tornando-se mais próximo e mais próximo de um segundo. “Em particular, então, o que atualmente chamamos de continuidade ou completude dos pontos numa linha é expresso pela ideia de que qualquer movimento finito de um ponto começando num ponto definido da nossa linha encerrando-se também num ponto definido dessa linha.” (FRIEDMAN, 1992, p 74)

Tal concepção temporal de operações de passagem ao limite está explícita no uso que Newton faz para justificar o raciocínio matemático no *Principia*. O ponto está na definição do que Newton significa por quantidade. A concepção de quantidade de Newton como temporalmente gerada está incorporada em seu método das *fluxões*, onde toda entidade matemática é pensada como fluente ou “quantidades fluidas”. Quantidades matemáticas não são, portanto, compostas de partes extremamente pequenas, mas geradas por um movimento contínuo. Kant adota essa concepção de continuidade nas "Antecipações da Percepção" em A169-177/B211-212. “Para Kant, como Newton, quantidades espaciais não são compostas de pontos, mas, ao invés disso, são geradas por movimento de pontos.” (FRIEDMAN, 1992, p 75)

Desde os seus anos de formação, Kant encontrava-se preocupado com o problema do movimento (sobre a matéria como móvel no espaço). Isso repercute nos *Princípios metafísicos* (1786), que assim mostram o quanto o idealismo transcendental estabelecido na *Crítica da Razão Pura* está entrelaçado com os profundos problemas conceituais provenientes da adequada caracterização dinâmica do espaço, tempo e movimento que dividiu as filosofias de Newton e Leibniz.

3. Construções na intuição pura são somente construções com régua e compasso?

Resultados de uma operação que consiste em realizar na intuição pura construções virtualmente possíveis apenas com o auxílio de régua e compasso seria tudo que se pode dizer acerca da natureza dos *objetos* matemáticos? Mesmo que sejam essencialmente construções, restaria algum sentido em que lhes fosse possível atribuir existência ou efetividade? A construção na intuição pura, além de um expediente epistemológico, seria também um expediente ontológico? Para responder a essas questões finais da nossa discussão sobre a condição de construtibilidade na intuição pura, voltemos ao texto dos *Prolegomenos*.

Como vimos, a matemática deve ter como fundamento uma intuição na qual representa todos seus conceitos *in concreto* e, no entanto, a priori, isto é, *construí-los.*

A construtibilidade dos conceitos é a primeira condição de possibilidade do conhecimento matemático. Mas o próprio ato de construir um conceito exige um meio no qual deve ser efetivado, e esse meio deve ser a intuição. Para a intuição, como vimos, apenas duas possibilidades são postas por Kant, a intuição pode ser pura ou empírica. Que tipo de intuição é exigida por esse processo de construir um conceito? A empírica não seria suficiente porque nela os conceitos não podem encontrar a necessidade e a universalidade necessárias para os conceitos matemáticos, de modo que deve ser numa intuição pura.

Uma intuição que se sabe pura, deve ser necessariamente a priori. E como é possível uma intuição a priori, pergunta Kant. Se a intuição depende da presença do objeto e a intuição a priori ocorresse sem a presença de um objeto, então a intuição a priori não poderia ser uma intuição. Kant pensa essa situação em analogia ao conceito. É possível que tenhamos um conceito a priori. Um conceito assim conteria apenas *o pensamento de um objeto em geral*, sem a relação imediata com o objeto. Um exemplo poderia ser o conceito de quantidade. Sendo assim, podemos ter um conceito a priori, mas ele não teria um significado. Para que o tivesse, seria necessário fazer dele *uso in concreto*, ou seja, aplicar ao conceito uma intuição na qual o objeto seria dado. Para o caso do conceito, é perfeitamente compreensível, mas para a intuição, teríamos que responder a questão que o próprio Kant formula: como a intuição do objeto pode preceder o próprio objeto?

A resposta para essa questão deve situar-se no escopo do idealismo transcendental. Em primeiro lugar, Kant assume que a intuição não pode representar as coisas como são em si mesmas e depois oferece as razões. Não podem porque se assim o fossem as coisas teriam que estar presentes porque só assim poderíamos saber o que está no objeto; e também porque mesmo que as coisas pudessem estar presentes não há como suas propriedades intrínsecas entrarem em nossa faculdade representativa. Em segundo lugar, se as intuições representassem as coisas em si, aquelas seriam sempre empíricas, por causa da necessidade da presença do objeto e porque não teriam lugar antes da apresentação do objeto. A intuição a priori é o mecanismo necessário para a compreensão do que poderia ser uma relação entre a representação e o objeto prescindindo da e antecedendo a presença do próprio objeto. Uma intuição que preceda o objeto tal como a intuição a priori, para que seja possível e para que possa produzir um conhecimento a priori, tem que conter apenas a forma da sensibilidade. Portanto, se admitirmos como possíveis proposições sintéticas a priori, é necessário admitirmos também o pressuposto de que as intuições não representam as coisas como são em si mesma.

A condição para que as construções na intuição a priori confiram conteúdo objetivo às proposições sintéticas a priori é, portanto, que as mesmas condições gerais da construção que determinam o indivíduo, determinem também o objeto do conceito a que esse indivíduo corresponde como esquema e que deve ser pensado como universalmente determinado. Isso é o que Kant afirma em A714/B742. Disso decorre que as condições gerais da construção determinam apenas o esquema do conceito. Ao objeto do conceito não se faz referência, senão como pensado.

Esse fato pode subscrever a condição do objeto da matemática como um objeto estritamente abstrato, já que ao objeto a matemática apenas se refere quanto a sua forma. Kant não é muito explícito ao falar de objetos matemáticos, e nos momentos de maior clareza ele não lhes atribui existência. De fato, ele parece rejeitar tal atribuição dizendo que "nos problemas matemáticos não existe questão da existência em absoluto" (A719/B747). A categoria pura da existência é esquematizada como existência em um tempo definido (A145/B184); isso implica a existência atual. Conhecer a existência atual é algo que exige a conexão com uma percepção atual por meio das analogias da experiência (A225/B272). “Por essa razão parece claro que a existência matemática não é uma forma de atualidade. Antes existem indicações de que Kant a pensa isso sob a categoria da possibilidade.” (PARSONS, 1992, p, 136-7). Considerar a existência na matemática é apenas através da construtibilidade, de modo que pode apenas ser considerada como uma existência possível: “a construção de um conceito mostra a existência possível de um objeto cuja forma é dada pela construção” (PARSONS, 1992, p 137). Mas a matemática não está preocupada com a existência em absoluto, de modo que se a construtibilidade é o elemento que garante as considerações sobre a existência na matemática, ela não dá conta do problema sozinha. Para considerar o objeto matemático possivelmente existente é necessária, além da construção do conceito, a ajuda de certas considerações filosóficas. Vejamos.

“Ser possível” para Kant, como bem lembra Parsons, é concordar com as "condições formais da experiência" isto é, com as condições da intuição e dos conceitos (A218/B266). Aquelas condições da experiência não são apenas o espaço como condição da experiência externa (do qual cuida a geometria), mas aquela “síntese formativa através da qual construímos um triângulo na imaginação, que é precisamente a mesma com a qual exercitamos a apreensão de uma aparência, fazendo para nós mesmos um conceito empírico disto” (PARSONS, 1992, p 137). O resultado surpreendente da submissão a essa dupla condição é que o conhecimento da realidade objetiva dos conceitos matemáticos – compreendida como mera existência possível de suas instâncias – que é a existência possível de instâncias para eles, é filosófico antes que puramente matemático. Com efeito, isso não deveria surpreender já que o próprio Kant afirma que a matemática não se preocupa com a existência. Afirmações sobre a existência do objeto matemático só poderiam ser supostas como sendo da alçada da filosofia.

Arthur Melnick (1992) apresenta uma interpretação da geometria kantiana bastante inusitada. Sua tese fundamental enunciada por ele mesmo é a seguinte: "o espaço para Kant é uma matéria da espacialização, i.e., é antes uma atividade ou modo ou comportamento produtivo do que um componente da realidade ao qual deve responder". Considerar o espaço como a matéria da espacialização torna explícita a atividade presente no conceito de construção. Vejamos como ele apresenta sua interpretação.

> "Dizer que a forma da intuição empírica é ela mesma dada na intuição pura, eu afirmo, é dizer que o comportamento que subjaz e direciona nossa capacidade de ser afetados pode também ser realizada e ordenada independentemente de como alguém pode ser assim afetado ao longo do caminho." (MELNICK, 1992, p 247-8)

O assunto da matéria da geometria não é, como muitos consideram, a figura propriamente dita como lembranças das operações realizadas pelo geômetra. São, pois, as operações como apontar, cortar, rotacionar, estender ou seguir que são, elas mesmas, os assuntos da geometria (cf. MELNICK, 1992, p 248). Até aqui imagino que Kant concordaria, dado que ele ressalta que o geômetra utiliza as figuras seja na intuição pura ou empírica, mas que elas mesmas são dispensáveis. Mas Melnik afirma que considerar o assunto da geometria apenas como construções e operações não é o mesmo que pretender que a geometria consista apenas de um conjunto de construções, atos ou operações; antes, ele sustenta que o assunto da geometria é exatamente um procedimento ou atividade de espacialização. Para resolver o problema gerado por sua interpretação semântica, ele afirma que nela, é claro, não existem entidades, nem mesmo atos como entidades, mas existem indivíduos, no sentido especifico de que os *procedimentos têm estágios individuais*. (cf. MELNIK, 1992, p 250). Dessa forma a geometria seria expressa na forma de regras para o comportamento.

Para Melnik, as operações são importantes para Kant porque elas podem ser guiadas pelo pensamento, enquanto que relações ou entidades apenas podem ser descritas pelo pensamento. E como, em última análise, o pensamento descritivo, não importando quão preciso e detalhado, é vazio, apenas as operações podem constituir o objeto da geometria.[10] Segundo essa

10 Coliva (2011) pode ser tomada como uma exemplo de autora que recusa a primazia da operação, se aceitarmos estender a Kant o seu modelo interpretativo da Prop. I. 1 de Euclides. Embora tenha suas origens na divisão entre ver, ver-como e tomar-como de Wittgenstein, Coliva pretende que esse modelo seria vantajoso na análise do argumento kantiano porque colabora no sentido de apresentar uma forma de "ver", portanto, perceptiva (sensível) e não puramente interpretativa como o "tomar-como", mas que difere do "ver com os olhos da mente", forma comum de interpretar a construção na intuição pura presente nas provas euclidianas. Esse ver-como que Coliva preconiza, e que Wittgenstein define, é algo como quando se tem a opção de, na mesma figura, ver P ou Q e ainda permanecer num estado passivo. Esse ver-como contrasta como o simplesmente ver, quando não se tem outra opção a não ser ver P, e com o tomar-como ou interpretar, quando, ainda que seja relativo ao ato de ver, tudo se dá (ou é realizado) apenas no pensamento. Nessa perspectiva, a chave da prova do teorema em questão é, para Coliva, deixar de ver os segmentos que formam o triangulo como sendo os seus lados e passar a vê-los como segmentos que intersectam duas paralelas. A questão que surge é: o que orienta essa mudança de aspecto? Não parece ser acidental esse deixar de ver segmentos como lados para vê-los como segmentos que intersectam paralelas. A resposta para Coliva é que não ocorrem, na axiomatização euclidiana, axiomas ou postulados que derivem da triangularidade da figura as características de seus ângulos. Mas temos o teorema conhecido como teorema das paralelas que, obviamente, porta as informações necessárias e relevantes sobre os ângulos exigidas pela prova. E é por isso que a *mudança de aspecto* produzida pelo ver-como é crucial para a prova. Ao que parece, para Coliva, embora a prova euclidiana exija que esse ver-como seja orientado conceitualmente, dado que a prova é uma cadeia inferencial, ela pode ser considerada intuitiva porque esse ato de ver-como exigido pela prova é ele mesmo uma forma de ver, portanto constitutivamente perceptivo, ele mesmo constitutivo da prova. Consequentemente, a prova euclidiana, como já era de se suspeitar, é ela mesmo intuitiva. Conforme se nota, a ênfase da análise de Coliva para o método matemático sustentado por Kant recaí no seu aspecto intuitivo, isto é, no caráter da *intutição pura*na qual se processam as construções. Para Melnick e Friedman, conforme vimos, a ênfase recaí no aspecto *construtivo* dessa operação, reivindicando o seu caráter eminentemente *prático* e *operacional*, não meramente passivo ou perceptivo.

interpretação, a falha das teorias “objetivistas” do espaço é justamente a consideração descritiva do espaço.

> “Somente se o espaço é a forma de nosso próprio comportamento, o pensamento tem um sistemático e global campo do comportamento como guia, e assim um escopo total da realidade para representar como resultado relativo de tal comportamento. Colocando mais simplesmente, não existe representação empírica determinada em absoluto, exceto se o espaço é a atividade do pensamento para guiar. Assim à geometria, como a ciência do espaço, deve ser dada uma interpretação operacional ou procedimental.” (MELNICK, 1992. p 252)

Se for assim, isto é, a matemática reduzida ao nível meramente operacional, o que nos resta ainda considerar sobre a natureza do objeto matemático, que permitisse minimamente restituir uma ontologia ajustada aos parâmetros críticos? Resta seu caráter de *esquema*. O objeto matemático é caracterizado por Kant no parágrafo 22 da primeira *Crítica*, onde Kant afirma que representar o objeto matemático é representar o fenômeno exclusivamente com respeito a sua forma. Mas no Prefácio aos *Princípios Metafísicos da ciência da natureza* Kant, em nota, afirma que aos objetos matemáticos, mais precisamente às figuras geométricas, pode-se atribuir somente uma essência e não uma natureza. A essência neste caso é o primeiro princípio interno de tudo o que pertence à possibilidade de uma coisa. Já a natureza é o princípio inerente a existência. Uma teoria racional da natureza só merece o nome de ciência se as leis que lhe subjazem forem conhecidas a priori. E conhecer algo a priori significa conhecer sua possibilidade. É importante lembrar que a ciência da natureza para que seja uma ciência genuína deve tomar a palavra natureza em seu sentido material, ou seja, tomá-la como um complexo de todas as coisas enquanto podem ser objetos do nosso sentido. Portanto, conhecer a possibilidade das coisas naturais determinadas não é possível por simples conceitos. Por esse caminho apenas podemos conhecer a possibilidade do pensamento, mas não o objeto como coisa natural. Conhecê-las enquanto "coisas naturais determinadas" é conhecer somente sua possibilidade através da exibição a priori da intuição correspondente ao conceito. E como vimos esse é justamente o processo de construção na intuição pura. Consequentemente, a matemática é a única forma de conhecer a natureza em sua *essência*, isto é, segundo apenas a sua possibilidade real, e não meramente lógica.

O caráter esquemático dos objetos matemáticos é reforçado em A223/B224, quando Kant afirma que a construção do conceito, sendo completamente a priori e, por consequência, responsável apenas pela forma do objeto, tem como resultado genuínos produtos da imaginação produtora. Para garantir a aplicabilidade da matemática aos fenômenos, as figuras construídas deveriam ser pensadas sob as condições nas quais se assentam todos os objetos da experiência. Segundo Kant, somente porque a construção dos conceitos matemáticos se fundamenta na intuição, o espaço, que ela mesma a condição formal *a priori* de toda experiência externa, e porque a síntese figurativa que constrói o conceito matemático é idêntica a que usamos na apreensão do fenômeno para convertê-lo num conceito da experiência, a síntese sucessiva da imaginação, que é possível ligar a um conceito matemático a representação da possibilidade de um objeto semelhante.

Os juízos sintéticos a priori são possíveis na matemática justamente pelo anterior princípio, o princípio do entendimento puro, os Axiomas da intuição, "toda intuição é uma magnitude extensiva" (B202). A matemática difere da filosofia por causa de seu processo construtivo, de modo que esse processo é o motivo pelo qual ela pertence ao *quanta*. Isso porque ela, como vimos, constrói seus conceitos na intuição e porque o único conceito que pode ser construído é o de magnitude. De modo que a matemática toma como seu objeto a quantidade. Mas de acordo com esse axioma da intuição, são justamente as quantidades construídas que tornam possíveis a apreensão dos fenômenos e a cognição dos objetos externos. Portanto, tudo aquilo que a matemática em seu uso puro prova para a apreensão dos fenômenos (prescrevendo e descrevendo as regras que constituem a própria intuição do espaço unicamente através do qual os fenômenos são possíveis), é também necessariamente válido para a cognição dos objetos externos. E isso seria o mesmo que dizer que a cognição matemática da quantidade puramente *construída* é também cognição da forma quantitativa dos objetos *empíricos* (cf. SHABEL, 2006, p 118).

Quarto Capitulo: O argumento a partir da geometria e a tese da idealidade do espaço.

Concentrar-nos-emos agora no argumento kantiano que ficou conhecido como "argumento a partir da geometria". Ele ficou assim conhecido justamente porque sua conclusão é extraída da consideração sobre a possibilidade de nossa cognição sintética *a priori* dos princípios da geometria euclidiana. Como já vimos, esse argumento compõe a Exposição Transcendental e ocorre somente na segunda edição da *Crítica da Razão Pura*. Vamos retomar aqui na íntegra a passagem do texto kantiano que guarda o assim chamado "argumento a partir da geometria". No que segue o analisaremos por partes, mas é importante termos o argumento como um todo no início para que possamos perceber adequadamente os passos dados pelos intérpretes em suas respectivas tentativas de esclarecer esse argumento no texto da primeira *Crítica*. Vejamos então o argumento.

> "A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e contudo *a priori*, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível? O espaço tem de ser originariamente uma intuição, porque de um simples conceito não se podem extrair proposições que ultrapassem o conceito, o que acontece, porém, na geometria (Introdução, V). Mas essa intuição deve-se encontrar em nós *a priori*, isto é, anteriormente a toda a nossa percepção de qualquer objeto, sendo portanto intuição pura e não empírica. Com efeito, as proposições geométricas são todas apodíticas, isto é, implicam a consciência da sua necessidade como por exemplo: o espaço tem somente três dimensões; não podem ser, portanto, juízos empíricos ou de experiência, nem derivados desses juízos (Introdução, II). Mas como poderá haver no espírito uma intuição externa que preceda os próprios objetos e que permita determinar a *priori o* conceito destes? É evidente que só na medida em que se situa simplesmente no sujeito, como forma do *sentido externo* em geral, ou seja, enquanto propriedade formal do sujeito de ser afetado por objetos e, assim, obter uma *representação imediata* dos objetos, ou seja, uma *intuição.* Sendo assim, só a nossa explicação permite compreender a *possibilidade da geometria* como

> conhecimento sintético *a priori.* Qualquer outro modo de explicação que o não permita, embora aparentemente semelhante à nossa, pode distinguir-se deste, por estas características, com a maior segurança." (B40-2)

Como vemos, Kant inicia o argumento afirmando o caráter sintético a priori da ciência que determina as propriedades do espaço, a geometria. A partir disso a investigação kantiana mostra o que deve ser uma representação do espaço para que seja possível um conhecimento tal como o da geometria. Esse movimento argumentativo foi compreendido por muitos intérpretes da filosofia kantiana – aqueles que Lisa Shabel (2004) chama de responsáveis pela interpretação padrão do argumento a partir da geometria – como um argumento no qual Kant tentou deduzir uma teoria do espaço como intuição pura a partir de uma suposição sobre a cognição matemática.

Allison (1983) considera o argumento como sendo somente a parte que vai da afirmação da característica sintética a priori da geometria como ciência do espaço ao estabelecimento do espaço como intuição a priori. Segundo o autor, nessa passagem, Kant efetivamente associa a natureza da cognição matemática à natureza das representações de espaço. Mas esse argumento não pode suportar a característica fundamental da representação do espaço, a saber, que ele é transcendentalmente ideal. O passo que estabelece essa característica, Allison chama-o de passo ontológico, e ele aparece somente na segunda parte do argumento que destacaremos acima: "É evidente que só na medida em que se situa simplesmente no sujeito, *como forma do sentido externo em geral*, ou seja, *enquanto propriedade formal do sujeito de ser afetado por objetos* e, assim, obter uma *representação imediata* dos objetos, ou seja, uma *intuição.*" (B40-2; grifos meus) Nessa passagem tomada isoladamente, Kant efetivamente afirma a intuição pura como a forma do sentido externo. Todavia nela não há referência à representação de espaço. Desse modo, se a intenção é garantir ou encontrar uma prova absoluta para a idealidade do espaço original, segundo Allison o argumento da geometria, que constitui somente a primeira parte, não é uma boa escolha. Veremos que essa forma de delimitar o argumento será utilizada por ele para determinar sua inutilidade como prova direta da idealidade transcendental do espaço.

Shabel (2004) reconstrói o argumento kantiano considerando a forma como é compreendido segundo a interpretação padrão e tendo como suporte a reconstrução apresentada por Bertrand Russell como segue:

> 1. Temos conhecimento sintético a priori da geometria euclidiana.
> Ou: A geometria euclidiana é necessariamente verdadeira.
>
> 2. Esse conhecimento é possível somente se o espaço for uma intuição pura.
> Ou: A intuição pura do espaço é uma condição necessária de nosso conhecimento sintético a priori da geometria.
>
> Então, o espaço é uma intuição pura. (SHABEL, 2004, p 201)

Segundo Shabel, essa forma de estruturar o argumento sugere que Kant tenta mostrar que nosso conhecimento geométrico fornece nosso conhecimento do espaço no seguinte sentido: a reflexão sobre o estatuto da cognição geométrica revela as características necessárias de nossa representação de espaço, ou seja, que ela é uma intuição pura. Lendo o argumento dessa forma, é inevitável que a conclusão de Kant sobre a natureza de nossa representação de espaço dependa diretamente da suposição substantiva sobre a natureza do nosso raciocínio matemático (cf. SHABEL, 2004, p. 201).

Ao que parece, é justamente essa forma de compreender o argumento da geometria que motiva Allison a elaborar um argumento em favor da idealidade transcendental do espaço e do tempo que dependa exclusivamente dos resultados encontrados na Estética Transcendental, mas somente aqueles resultados alcançados a partir dos conteúdos da Exposição Metafísica do conceito de espaço. Abandonar o argumento da geometria é a estratégia utilizada por Allison para salvaguardar a tese da idealidade transcendental do espaço das críticas baseadas no advento das geometrias não euclidianas. Para atingir seus propósitos, Allison precisa estabelecer um argumento que tenha como premissa apenas os conteúdos da exposição metafísica e ainda explicitar a independência do argumento em relação a qualquer tipo de suposição referente à natureza das proposições da matemática. Veremos que, para Shabel, essa estratégia ignora uma característica importante do argumento kantiano. Segundo a autora, abandonar o argumento a partir da geometria tem como consequência o abandono do papel fundamental que esse argumento desempenha para a compreensão da nova teoria do espaço proposta por Kant. A interpretação apresentada por Shabel restabelece a importância do argumento da geometria e lhe confere um grau de necessidade, o que nos permite duvidar da estratégia de Allison, embora talvez não seja suficiente para refutar a sua interpretação.

Veremos ainda que uma terceira via interpretativa é possível. Michael Friedman (2012) apresenta uma interpretação que, mesmo não tendo como base o argumento da geometria tal como descrito na Exposição Transcendental, restabelece o vínculo de dependência justificativa entre a tese da idealidade transcendental do espaço e as características da geometria como corpo de conhecimento. Se Friedman estiver correto, veremos que, embora os resultados da exposição metafísica possam ser a prova exclusiva da idealidade transcendental do espaço, as próprias conclusões que constituem as bases da prova não podem ser inteligíveis se não se supõe um vínculo com a geometria. Se esse vínculo não pode ser de uma necessidade lógica como é corretamente defendido por Allison, ele deve possuir uma necessidade tão forte quanto aquela, a saber, uma necessidade transcendental.

1. O argumento da geometria

1.1. Acusação e defesa

No capítulo onde discutimos a dupla exposição do conceito de espaço, iniciamos nossa aproximação ao problema circunscrito pelo argumento da geometria. Agora, discutiremos a relação que esse argumento mantém com a formulação da tese da idealidade transcendental do espaço e a forma como os autores citados acima consideraram essa relação e suas consequências para a compreensão da filosofia kantiana da matemática. A tese da idealidade transcendental do espaço afirma que o espaço original somente é possível se ele for absolutamente subjetivo. O espaço é um predicado que não se pode atribuir às coisas indistintamente, mas somente aos objetos da percepção humana, somente aos fenômenos.

Por que Allison acredita que o argumento da geometria pode ser dispensado? Admitir a importância da filosofia da geometria kantiana para o argumento em favor da idealidade transcendental do espaço traz, segundo

Allison, o problema da impossibilidade de se admitir geometrias que descrevam espaços não-euclidianos. Como vimos no capítulo que discute o método matemático da construção na intuição pura, para Kant, as bases cognitivas para a construção dos conceitos matemáticos são idênticas aos Postulados euclidianos, de modo que, se a geometria é a ciência que descreve necessariamente a priori as características do espaço, o espaço descrito deve ser necessariamente o espaço euclidiano. Allison reduz a possível defesa aberta dessa tese a duas passagens: o argumento da geometria empregado na Exposição Transcendental do conceito de espaço e a tese das contrapartes incongruentes. Sua pretensão é mostrar que, enquanto argumento em favor da idealidade transcendental do espaço, essas duas passagens não resistem a um exame de suas provas e que, portanto, qualquer argumento para aquela finalidade deve ser independente daquelas teses, de tal modo que o Idealismo Transcendental permanecerá firme diante de qualquer tipo de desenvolvimentos futuros da geometria e de sua descrição do espaço.

Segundo a reconstrução proposta por Alisson, o argumento apresentado na Estética Transcendental é, conforme vimos acima, composto de dois passos. No primeiro, consta a afirmação de que o caráter a priori e intuitivo da representação do espaço é uma condição necessária da geometria. O conhecimento geométrico tal como ele é considerado por Kant implica um substrato de um tipo específico, a saber, o espaço como descrito na Exposição Metafísica, isto é, intuitivo e a priori.

O segundo passo contém a pretensão de que o caráter a priori e intuitivo exige que o espaço em si mesmo deva ser a forma do sentido externo ou da sensibilidade – algo que Allison nomeia “condição ontológica” e identifica imediatamente com o estabelecimento da tese da idealidade do espaço. Nesse caso, como já foi dito, a condição ontológica do espaço decorre exclusivamente do caráter a priori e intuitivo da representação do espaço. Logo, a idealidade transcendental do espaço, exatamente como o caráter intuitivo e a priori da representação do espaço, é apenas uma condição necessária e não uma condição suficiente para a geometria considerada como uma ciência sintética a priori (cf. ALLISON, 1983, p.167-8). Se essa análise de Allison estiver correta, negar a geometria euclidiana em virtude do surgimento das geometrias não-euclidianas não implica a negação da idealidade transcendental do espaço.

O segundo motivo pelo qual o argumento é descartado como inútil é justamente o fato de que o caminho que parte da geometria para alcançar a tese da idealidade transcendental passa apenas pelo caráter a priori e intuitivo da representação do espaço. Como Allison pretende ter mostrado que esse caráter peculiar desse tipo de representação é garantido pelos argumentos da Exposição metafísica, fica claro que é totalmente dispensável a consideração da Exposição transcendental e de qualquer outra referência à natureza das proposições matemáticas. Para Allison, esse argumento pode ser relevante apenas como um apoio suplementar às teses da intuitividade e da aprioridade das representações do espaço e do tempo, mas jamais um argumento indispensável à tese da idealidade transcendental do espaço.

Na contramão da via argumentativa de Allison, Lisa Shabel (2004) pretende reconstruir o argumento da geometria de tal forma que ele se apresente como sintético e não como transcendental, conforme supõe a interpretação padrão. Segundo a autora, a interpretação padrão desse argumento afirma que Kant tentou deduzir uma teoria do espaço como intuição pura a partir de uma suposição sobre a cognição matemática. Shabel pretende reavaliar o papel da cognição geométrica nos argumentos da Estética, mostrando que a filosofia da geometria de Kant constrói uma ponte filosófica entre sua teoria do espaço e sua doutrina do idealismo transcendental, de modo que nossa intuição pura do espaço fornece as bases para nossa cognição dos primeiros princípios da geometria.

O ponto principal é que o "argumento da geometria" não analisa nossa cognição matemática com o intuito de estabelecer que temos uma intuição pura do espaço. Ao invés disso, o argumento estabelece que a cognição geométrica desenvolve-se a partir de uma intuição pura do espaço. A diferença entre a interpretação que Shabel chama de padrão e sua própria interpretação consiste no fato de que, na primeira, nosso conhecimento geométrico atual é rastreado até sua origem para mostrar que temos uma intuição pura do espaço, ao passo que, na segunda, a intuição pura do espaço é oferecida como, ao mesmo tempo, a origem real da cognição dos primeiros princípios da geometria e o meio para a produção da posterior cognição baseada em teoremas. Desse modo, ao que parece, Shabel inverte a implicação na primeira parte do argumento e afirma que o espaço como intuição pura é condição suficiente para a cognição geométrica. Segundo a autora, interpretar o argumento da geometria dessa forma serve para ilustrar e esclarecer a noção kantiana de uma dedução sintética, noção que tem grande influência interpretativa nos argumentos subsequentes da primeira *Crítica.*

Para reconstruir e reinterpretar o argumento da geometria, Lisa Shabel distingue três afirmações kantianas que normalmente são confundidas, ou assimiladas.

> (1) O espaço é uma intuição pura;
> (2) O espaço é uma forma pura da intuição sensível;
> (3) O espaço é apenas como descrito em 1 e 2. (cf. SHABEL, 2004, p 197)

Para Shabel, a afirmação (1) é equivalente à declaração de que nossa representação do espaço é absolutamente *a priori* e não conceitual; ou que o espaço nos é representado como uma intuição pura. Já (2) equivale a declaração de que a representação descrita em (1) fornece uma estrutura parcial para a cognição de objetos empíricos. E (3) expressa uma posterior e independente declaração de que espaço não é nada mais a estrutura descrita em (1) e (2), isto é, que o espaço é transcendentalmente ideal (cf. SHABEL, L. 2004. p 197).

O que Shabel pretende mostrar é que, antes de servir como argumento para qualquer uma das afirmações acima, o argumento da geometria estabelece uma relação entre nossa representação do espaço da forma como foi expressa em (1) e nossa cognição da geometria, permitindo à geometria como ciência matemática do espaço desempenhar um papel nos argumentos subsequentes para (2) e (3).

Partindo dos resultados já alcançados na Exposição metafísica, Kant pergunta como nossa representação do espaço pode fornecer aquelas cognições que são o único domínio da ciência da geometria. A pergunta, reforça Shabel, não é *se*, mas *como* elas podem fazer isso. Para que alguém possa ter cognição das propriedades do espaço, ele deve começar com a cognição do espaço ele mesmo, ou seja, o geômetra deve estar apto a conhecer ou mentalmente representar o objeto da ciência da geometria a fim de que possa conhecer ou representar as propriedades daquele objeto.

Somente porque a representação original do objeto da geometria, isto é, o espaço, é a priori que o conhecimento de suas propriedades é, pois, igualmente a priori. E porque ele é uma intuição, o conhecimento de suas propriedades é sintético.

O argumento extraído da Exposição Transcendental que Allison supõe dispensável tem sido estabelecido, como já vimos, da forma como segue.

> 1. Temos conhecimento sintético a priori das proposições geométricas
> Ou: A geometria euclidiana é necessariamente verdadeira.
>
> 2. Esse conhecimento é possível somente se o espaço for uma intuição pura.
> Ou: A intuição pura do espaço é uma condição necessária de nosso conhecimento sintético a priori da geometria.
> Então, o espaço é uma intuição pura. (SHABEL, 2004, p 201)

Segundo Shabel, essa forma de processar o argumento leva inevitavelmente à conclusão de que o que Kant tenta mostrar é que nosso conhecimento geométrico *fornece* nosso conhecimento de espaço. Na medida em que refletimos sobre o estatuto do nosso conhecimento geométrico estabelecido como conhecimento sintético a priori das representações do espaço, tal reflexão necessariamente nos revela as características das representações descritas e, portanto, revela as características que pertencem necessariamente à nossa representação de espaço, ou seja, que ela é uma intuição pura. Lendo o argumento dessa forma, é inevitável que a conclusão de Kant sobre a natureza de nossa representação de espaço dependa diretamente da suposição substantiva sobre a natureza do nosso raciocínio matemático.

Para Shabel, essa não é a forma como o argumento deve ser lido. Primeiro, porque os objetivos de Kant na Exposição Transcendental diferem dos da Exposição Metafísica, onde Kant supõe ter mostrado que o espaço é uma intuição pura. Investigando os objetivos de cada uma das exposições, Shabel afirma que Kant não está raciocinando sobre as bases da cognição geométrica, como aparece na formulação padrão do argumento, mas antes sobre as bases daquilo que já tinha sido mostrado como sendo a priori no conceito, os resultados da Exposição Metafísica. Na Exposição Transcendental, "Kant está raciocinando sinteticamente a partir da intuição pura do espaço exibido na Exposição Metafísica em favor da possibilidade do conhecimento geométrico sintético a priori." (SHABEL, 2004, p 202)

A questão que Kant está respondendo é *como* nossa representação do espaço fornece nossa cognição daquilo que é domínio exclusivo da ciência da geometria. Para obter essa cognição das propriedades do espaço, deve-se começar com a cognição do espaço original; em outras palavras, o geômetra deve estar apto a conhecer ou representar mentalmente o objeto da ciência da geometria para que possa conhecer ou representar mentalmente as propriedades daqueles objetos. Porque a representação original do objeto da geometria, isto é, o espaço, é a priori, os conhecimentos de suas propriedades é igualmente a priori. E porque o espaço é uma intuição, os conhecimentos de suas propriedades são sintéticos (cf. SHABEL, 2004, p. 202).

> "Em particular, Kant apresenta uma teoria de acordo com a qual o conhecimento geométrico é fundado e gerado a partir da já estabelecida intuição pura do espaço. Disso se segue que os primeiros princípios da geometria, tanto quanto os teoremas deduzíveis deles, todos se originam em uma intuição pura de espaço." (SHABEL, 2004, p. 203).

O suporte para essa teoria proposta por Kant advém da contradição que poderia resultar da suposição de que a representação original do espaço não é nem intuitiva nem a priori, contrariando aquilo que já havia sido estabelecido (cf. SHABEL, 2004, p. 203). E, principalmente, essa suposição contraria a prática matemática, na qual o geômetra emprega procedimentos construtivos para demonstrar proposições sintéticas que, apesar disso, são necessariamente verdadeiras.

> “Do meu ponto de vista, então, o ‘argumento da geometria’ de Kant mostra que nossa cognição de espaço nos oferece a nossa cognição de geometria – grosso modo, o inverso do que tem sido alegado. Dito de outro modo, o raciocínio de Kant tem como premissa a conclusão obtida na seção anterior, qual seja, que o espaço é uma intuição pura, e tem como objetivo uma explicação sobre o modo como essa conclusão explica outro corpo de cognição, a saber, geometria. Recordando o objetivo específico para esta seção, Kant pergunta se a pura intuição do espaço serve (e deve servir) como um princípio para se obter conhecimento acerca da possibilidade de outra cognição sintética a priori. Tendo mostrado que o espaço é uma intuição pura, é como se Kant, então, perguntasse: o que estamos representando quando representamos o espaço? Que tipo de conhecimento a nossa representação do espaço nos proporcionar, e como?" (SHABEL, 2004, p 204)

Importava, para Allison, negar que a tese da idealidade transcendental do espaço seja logicamente dependente do argumento da geometria e, por isso, seu argumento não avalia os méritos ou os defeitos da concepção kantiana da geometria. A estratégia adotada por Allison parece alcançar tal objetivo, e estabelecer um argumento que dependa exclusivamente das características intuitiva e a priori da representação do espaço mostra que o estabelecimento da tese da idealidade do espaço pode prescindir do argumento da geometria – o que não seria o caso se a dependência entre os argumentos fosse logicamente necessária. Por seu turno, conforme vimos, Shabel concorda que o argumento para a idealidade é necessariamente dependente das características constitutivas da representação do espaço.

Todavia, ela discorda de Allison sobre a independência do argumento da idealidade, pois, na sua interpretação, a teoria kantiana do espaço necessita do argumento da geometria porque este apresenta a característica sintética necessária para a garantia da cognição dos objetos matemáticos e das proposições geométricas, consequentemente da própria prática matemática. Shabel exclui igualmente a possibilidade de uma relação lógica entre os argumentos, e atribui uma necessidade sintética. Mas a importância atribuída por Kant ao argumento da geometria, que pode ser presumida pela forma como aparece no texto, considerando que ele aparece na segunda edição da primeira *Crítica* numa sessão específica com o intuito de apresentar uma exposição transcendental do conceito, mesmo tendo atingido o objetivo de expor sua origem metafísica, deve ter um valor para a economia e compreensão das demais teses sustentadas ao longo do texto.

Veremos que é possível supor que entre o argumento da geometria e o argumento da idealidade transcendental do espaço deve haver sim uma relação forte o suficiente para que o argumento da geometria não seja visto apenas como uma tentativa de esclarecer ainda mais aqueles ainda não convencidos da necessidade de uma nova teoria do espaço. Se não é possível encontrar uma necessidade lógica entre esses argumentos, é fundamental para a concepção kantiana da filosofia da matemática estabelecer uma necessidade transcendental entre esses argumentos.

1.2. Apêndice: O argumento da geometria na explicação das contrapartes incongruentes do espaço

Esse é o segundo argumento considerado por Allison como estabelecendo uma relação direta entre a natureza das proposições matemáticas e a idealidade transcendental do espaço. Por contrapartes incongruentes, Kant compreende aqueles objetos que são completamente similares uns aos outros no que diz respeito a suas propriedades intrínsecas, mas que, mesmo assim, não podem estar contidos dentro dos mesmos parâmetros espaciais, ou seja, diferem em suas propriedades externas. Essas contrapartes podem ser objetos geométricos como triângulos esféricos, ou objetos físicos como as mãos direita e esquerda.

Esse argumento não é encontrado na primeira *Crítica*, apenas nos *Prolegômenos* (§13), nos *Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza*, e no ensaio de 1768 “Sobre a fundamentação última das diferentes regiões no espaço”. Para Allison, o presente argumento é menos capaz que o argumento da geometria apresentado acima de prover uma prova direta da Idealidade Transcendental do Espaço. O primeiro indício é o fato de que por vezes Kant utilizou os mesmos fenômenos, o das contrapartes incongruentes, para extrair diferentes conclusões. No ensaio de 1768, texto pré-crítico, Kant utiliza o argumento das contrapartes para mostrar, em apoio à posição newtoniana, que o espaço é um dado fundamental da experiência humana, anterior e independente das coisas e de suas relações. Na *Dissertação Inaugural*, um texto ainda do período pré-crítico, Kant apela ao argumento da incongruência para mostrar que nosso conhecimento do espaço se baseia na intuição e que não é um conhecimento puramente conceitual. Finalmente no período crítico, embora não explicitamente na *Crítica da Razão Pura*, ele utiliza o mesmo fenômeno em apoio à tese da idealidade (Allison, pág 169). Essa constante alteração nos resultados kantianos levaram a críticas, mas Allison não concorda com tal abordagem, por mais que ela pareça interessante. Para ele, essas mudanças espelham um desenvolvimento consistente da compreensão kantiana sobre a relação direta entre a teoria relacional leibiniziana sobre o espaço e sua teoria da sensibilidade como percepção confusa. Os usos kantianos desse argumento foram sempre em função de refutar a teoria leibniziana do espaço, e na *Dissertação* avança mostrando que a representação do espaço é intuitiva e não conceitual. Mas o problema, segundo Allison, está justamente no fato de que o passo para a idealidade transcendental no caso do paradoxo das contrapartes incongruentes não é nem suportado nem permitido (Allison, pg 169).

Nos *Prolegômenos*, Kant sugere que as contrapartes incongruentes apresentam um paradoxo que somente o Idealismo Transcendental é capaz de resolver. O paradoxo consiste no fato de que *existem* objetos (geométricos e físicos) que são qualitativamente idênticos (que possuem um completo acordo interno), mas que não podem ser substituídos entre si porque diferem em suas relações externas. Segundo Allison, as contrapartes incongruentes configuram um paradoxo apenas para os leibnizianos, tendo em vista que para esses o paradoxo se apresenta como um contraexemplo ao Princípio da identidade dos indiscerníveis. Ao mesmo tempo em que mostra que as contrapartes só podem ser entendidas quando referidas a um "*espaço tridimensional global* independente desses objetos e de suas relações" (ALLISON, 1983, p 170).

Esse é justamente o uso feito por Kant do argumento no artigo de 1768. Esse resultado, tendo como pano de fundo a distinção intuição/conceito, compõe a solução alcançada por Kant na *Dissertação* de 1770, de que esse espaço global anterior aos objetos e suas relações é mesmo uma intuição e não pode ser um conceito. Mas, no desenvolvimento do mesmo argumento nos *Prolegômenos*, Kant não apenas reitera os resultados já alcançados nos textos já citados como acrescenta duas importantes conclusões: que o espaço é a forma da intuição externa e que os objetos experimentados por essa intuição são apenas fenômenos. Allison afirma, porém, que mais uma vez Kant não pode utilizar esse argumento como prova independente da idealidade. Não pode porque o argumento das contrapartes apenas pode provar que não podemos considerar os objetos como mônadas leibnizianas e, por conseguinte, que nossa percepção dos objetos não deve ser tomada como confusa. Mas de forma alguma pode garantir que os objetos sejam aparências no sentido transcendental ou que o espaço é a forma do sentido externo. Isso seria o caso se essa fosse a única alternativa possível. Mas, como o próprio Kant já havia encontrado em 1768, existe uma alternativa que garante a inteligibilidade das contrapartes, a saber, a concepção newtoniana de espaço absoluto, de tal modo que Kant necessitaria de um argumento auxiliar que possibilitasse o passo ontológico, cuja ausência nos leva a concluir que o argumento das contrapartes não é prova independente para a idealidade do espaço.

A questão para Allison é a de que se, como parece razoável, a incongruência das contrapartes não prova ainda que a representação do espaço é a priori, parece que esse argumento é menos poderoso que o argumento da geometria.

1.3. O argumento em favor da Idealidade transcendental do espaço livre do argumento da geometria.

O verdadeiro argumento em favor da idealidade transcendental do espaço, segundo Allison, está contido na sessão intitulada “Conclusões dos conceitos anteriores”. Para ele, é nesse momento que Kant dá o passo que vai da natureza das representações do espaço ao estatuto ontológico do espaço original. Kant extrai as conclusões a partir do conteúdo apresentado na Exposição metafísica sobre as representações do espaço e depois afirma que o espaço é empiricamente real e transcendentalmente ideal.

A primeira conclusão extraída por Kant afirma que o espaço não representa nenhuma determinação que possa ser atribuída aos objetos considerados em si mesmos e que permaneça mesmo quando se tenha feito abstração de todas as condições subjetivas da intuição. Desse modo, a pretensão de Kant é ter mostrado que a representação do espaço (a intuição a priori) não contém nenhuma propriedade que possa ser predicada das coisas quando essas não são consideradas em relação às condições subjetivas da intuição.

A segunda conclusão afirma que o espaço não pode ser nada mais que a forma de todos os fenômenos do sentido externo. Com o intuito de esclarecer essa conclusão, tendo em vista que apesar da breve referência a distinção forma/matéria feita na Estética transcendental o leitor não possui elementos suficientes para compreender essa afirmação, Kant afirma que o espaço é a condição subjetiva da sensibilidade e é justamente essa condição que torna possível a intuição externa de objetos.

Tendo extraído essas conclusões, Kant termina de preparar o terreno para apresentar o argumento em favor da idealidade transcendental do espaço. Em A26-27/B42-43, ele afirma que somente a partir do ponto de vista humano é que podemos falar de espaço e de extensão. Se desconsiderarmos a única condição subjetiva, que é justamente o fato de que podemos ser afetados pelos objetos, as representações do espaço não significam nada. Assim, os predicados espaciais só podem ser relativos às coisas na medida em que estas nos aparecem ou, o que é o mesmo, quando elas são objetos de nossa sensibilidade.

Segundo Allison, é nesse passo que Kant apresenta a tese da idealidade, que afirma a limitação dos predicados espaciais aos fenômenos, aos objetos da sensibilidade. Isso pode ser dito de uma forma negativa, que os predicados espaciais não podem ser predicados das coisas quando consideradas em si mesmas mediante a razão, i.e., sem levar em conta a constituição de nossa sensibilidade (cf. ALLISON, 1983, p 173).

Para Allison, é muito fácil perceber como o realismo empírico relativo ao espaço pode surgir da análise do lugar da representação na experiência. Dizer que a representação enquanto condição da experiência humana só é aplicável aos objetos quando esses são experimentados por nós parece óbvio. O problema surge quando a partir da mesma análise desejamos garantir a idealidade transcendental. E esse é o motivo que levou muitos intérpretes a assumirem que o argumento real em defesa da idealidade encontra-se fundado no caráter sintético a priori da geometria. Como ele pretende ter mostrado, o argumento da geometria é insuficiente. Portanto, parece indispensável estabelecer um argumento que apele somente à natureza intuitiva e a priori da representação do espaço e que seja capaz de produzir um resultado ontológico sustentado exclusivamente sobre essas bases.

Allison o formula da seguinte forma: “uma intuição a priori é possível *se e somente se* contém ou apresenta à mente uma forma da sensibilidade” (ALLISON, 1983, p 176). Esse é um argumento implícito que possui dois passos e que, se eles forem estabelecidos adequadamente, garante as condições necessárias e suficientes para o argumento da idealidade transcendental do espaço.

Na tentativa de estabelecer a primeira parte do argumento, Allison afirma que o que Kant pretende mostrar é apenas que uma intuição a priori é possível *se* contém ou apresenta à mente sua própria forma da sensibilidade. As interpretações correntes consideram que as expressões “forma do fenômeno”, “forma da intuição”, “forma da sensibilidade” e “intuição pura” são expressões virtualmente equivalentes. Isso transferiria o problema apenas para uma questão de definição. Para mostrar que isso não é o caso, Allison estabelece diferenças entres essas expressões. Seguindo essas considerações, ele pretende ter estabelecido a parte “*se”* do argumento que dessa forma afirmaria o seguinte: “se o conteúdo de uma intuição dada é uma forma ou característica formal dos objetos da intuição (o intuído) que pertence a esses objetos unicamente em virtude da constituição da mente (sua forma de intuir), então a intuição deve ser a priori.” (ALLISON, 1983, p 178) Por isso o conteúdo de uma tal intuição seria necessário e universal, ao menos para sujeitos equipados com a mesma forma de intuir, e sua fonte não residiria em nenhum objeto em si nem em nenhum dado sensível produzido pela afecção de objetos à mente. O ponto de Allison é que essa pretensão é completamente geral e não faz nenhuma referência específica a análise da representação do espaço.

O resultado estabelecido pela primeira parte do argumento é mínimo, tendo em vista que ele apenas garante uma condição necessária da aprioridade da intuição, a saber, que seu conteúdo seja a forma da sensibilidade. Então cabe à segunda parte, aquela chamada de "*somente se*", excluir todas as alternativas de conteúdo garantindo a necessidade de que ele seja exclusivamente a forma da sensibilidade. As alternativas possíveis são a newtoniana e a leibniziana. Allison tenta mostrar que a despeito das objeções, Kant considera que sua explicação da representação do espaço como intuição pura exclui as duas alternativas. Os argumentos que provam a insuficiência das concepções leibnizianas e newtonianas de espaço em afirmar o espaço como forma da sensibilidade, mais uma vez, são encontrados na Exposição metafísica. Allison sublinha que essa argumentação independe da suposição da característica sintética a priori das proposições da geometria.

Apesar de não se valer do argumento da geometria propriamente dito como tem sido o caso dos autores anteriormente apresentados, Friedman refuta a tese de Allison por encontrar, mesmo que de forma implícita, um vínculo direto entre a teoria do espaço estabelecida na Estética Transcendental e a concepção kantiana de geometria.

Para mostrar essa relação, Friedman apresenta uma distinção importante entre o espaço geométrico e o espaço metafísico. O espaço geométrico é aquele construído sucessivamente pelo geômetra. Por ser produto de um processo sucessivo de construção, o espaço geométrico é sempre finito, dado na medida em que é gerado. A possibilidade de necessariamente poder sempre ampliar um espaço (dos quais pode haver muitos) até o infinito está baseada numa representação original de um espaço infinito, singular e subjetivamente dado. Obviamente essa representação original é então o espaço metafísico, o espaço subjetivamente dado da nossa forma pura da intuição externa, exatamente como descrito pela exposição metafísica na Estética Transcendental.

Na Exposição Metafísica, os dois tipos de espaço podem ser retirados de cada um dos argumentos ali expostos. Do primeiro argumento, do espaço enquanto forma do sentido externo, Friedman extrai uma estrutura a que denomina como "espaço perspectivo" e, do segundo argumento, a estrutura que chama "estrutura da geometria pura".

O espaço perspectivo surge do fato de que, no primeiro argumento, o espaço enquanto forma do sentido externo permite representar os objetos como situados fora de nós justamente porque os representa como espacialmente externos ao sujeito que os percebe. Desse modo, o espaço como forma do sentido externo significa que o espaço "contém o ponto de vista a partir do qual os objetos do sentido externo são percebidos" (FRIEDMAN, 2012, p 16). Segundo o autor, seria natural encarar essa estrutura como sendo a priori, visto que ela não depende dos objetos externos; ao contrário, ela se apresenta invariante tanto com relação a qualquer alteração nos objetos percebidos quanto do ponto de vista do qual são percebidos os objetos. Isso garante que essa estrutura não expressa de maneira alguma o conteúdo da intuição externa, mas somente sua forma, como é a pretensão do argumento. Além disso, as próprias mudanças possíveis de perspectiva constituem o que hoje compreendemos como uma estrutura matemática. O próprio Kant também assim as compreendia tanto que ressalta que as duas construções euclidianas fundamentais de traçar uma reta e construir um círculo são geradas por rotações e translações de pontos e de segmentos de retas. A estrutura matemática que subjaz a concepção de espaço perspectivo é justamente “um grupo de movimentos ou transformações (euclidianos) compreendendo todas as translações possíveis do nosso ponto de vista inicial através do espaço, e todas as possíveis rotações de perspectivas associadas a esse ponto de vista ao redor do ponto dado” (FRIEDMAN, 2012, p 18).

O segundo argumento discute a necessidade da aprioridade da representação do espaço. O passo do argumento que é decisivo para alcançar a conclusão desejada é justamente a prova da possibilidade da representação do espaço como vazio de objetos. O ponto de Friedman é o seguinte: onde mais podemos imaginar a possibilidade de *representar* (e não apenas de pensar, o que nos remeteria às acusações de um argumento psicológico) o espaço como vazio de objetos senão quando estamos fazendo geometria pura? O motivo que leva Kant a compreender a matemática pura como envolvendo essencialmente recursos cognitivos não discursivos ou não conceituais e, ao mesmo tempo, tendo garantida sua universalidade e necessidade é justamente a “regra de síntese” que constitui o esquema dos conceitos sensíveis puros, os conceitos matemáticos.

No capítulo sobre o Esquematismo dos Conceitos Puros do Entendimento Kant distingue o *esquema* geral de um “conceito sensível puro” (conceito matemático) de qualquer *imagem* particular que cai sob esse conceito. Segundo Friedman o esquema nada mais é que uma “regra de síntese” que no texto kantiano (A140-1/B180) nada mais é que a construção euclidiana padrão, que no exemplo citado por Kant é a construção de um triangulo qualquer. Essa "regra de síntese" enquanto construção é considerada por Kant nos Axiomas da Intuição como uma "mera função da imaginação produtiva". Partindo dessa argumentação, Friedman supõe que é possível tomar as construções euclidianas correspondentes aos conceitos geométricos fundamentais como sendo os esquemas desses conceitos. (cf, FRIEDMAN, 2012, p 8) Enquanto operações construtivas, os esquemas são capazes de fornecer uma série sucessiva de todas e quaisquer imagens que podem ser apresentadas aos conceitos sensíveis puros, possuindo a generalidade e a universalidade exigidas por esses conceitos. Segundo Friedman, essa é a única forma de compreendermos por que Kant considera que a matemática pura não envolve essencialmente recursos cognitivos não discursivos ou não conceituais e, mesmo assim garantir a universalidade e a necessidade das proposições matemáticas. (cf, FRIEDMAN, 2012, p 9).

Como vimos, para Friedman os indícios da relação entre os argumentos que garantem a idealidade e aprioridade do espaço e a geometria como corpo de conhecimento sintético a priori podem ser encontrados na Exposição Metafísica. Mas essa relação pode ficar ainda mais clara quando consideramos o argumento de Friedman que mostra a relação entre a geometria e a possibilidade de qualquer cognição de objetos da percepção sensorial. Para ele, o fato de que todos os objetos da intuição empírica devam necessariamente conformar-se aos princípios a priori da matemática estabelecidos na intuição pura tem importância central na filosofia da geometria de Kant, e ao que parece, na compreensão da importância do argumento da geometria para o estabelecimento da tese da idealidade do espaço.

Os argumentos da Exposição Metafísica, segundo Friedman, estabelecem um espaço metafísico (ou o espaço ele mesmo) como uma totalidade de perspectivas possíveis a partir das quais o sujeito pode ser afetado por objetos externos. A unidade dessa totalidade em um “espaço único que tudo abrange” seria, portanto, a unidade transcendental da apercepção. A regra de síntese que garantiria essa unidade implica, por sua vez, que qualquer objeto externo possível é em princípio perceptível pelo mesmo sujeito – mediante uma sequência apropriada de translações e rotações a partir de uma perspectiva inicial qualquer. Segundo Friedman, é justamente esse espaço singular infinito e oniabrangente que fundamentaria, então, a possibilidade de construções geométricas baseadas, como vimos, em nossa capacidade de traçar, na intuição pura, uma linha pela translação de um ponto, e de girar essa linha (em um plano) em torno de um de seus extremos. O exercício dessa capacidade é, por si só, uma expressão da síntese transcendental da imaginação (a construção na intuição pura dos conceitos geométricos), compreendida como “uma ação do entendimento sobre a sensibilidade, e sua primeira aplicação (sendo ao mesmo tempo fundamento de todas as demais) a objetos da intuição possível para nós.” (cf, FRIEDMAN, 2012, p 23)

Conclusão

Por tudo que dissemos acima, será possível responder por fim a questão que nos acompanhou por todo esse trabalho: qual a relação entre a doutrina kantiana do espaço e a matemática? Em que direção essa relação deve ser estabelecida? É possível desconsiderar a concepção de matemática (principalmente da geometria) e ainda permanecer com uma compreensão idealista transcendental da natureza do espaço?

Autores tais como Allison e Shabel acreditam que o fundamento para supor um vínculo entre a matemática e a doutrina kantiana do espaço encontrava-se no argumento conhecido como “argumento da geometria”. Nesse argumento, Allison encontra o germe do erro e do engano das interpretações correntes sobre a idealidade do espaço. Esse erro determinaria o fim da possibilidade de mantermos a compreensão das teses mais abrangente do Idealismo Transcendental conquistado pelo conjunto da filosofia crítica. A principal dificuldade aqui seria o fato de que, afirmando o vínculo lógico entre a tese da idealidade transcendental do espaço e a geometria, determinar-se-ia o abandono daquela tese, visto que, pela sua premissa, o espaço deveria ser compreendido como sendo necessariamente euclidiano, enquanto hoje se sabe da existência de geometrias que negam o quinto postulado de Euclides, caracterizando-se assim como não-euclidianas. .

Shabel, ao contrário de Allison, entende que o argumento da geometria desempenha um papel fundamental na compreensão da doutrina kantiana do espaço. Ela pretende desfazer o pressuposto da análise do argumento feita por Allison, que consiste em admitir um tipo de vínculo lógico entre a idealidade do espaço e a cognição geométrica. Na interpretação de Shabel, o que Kant pretende especular acerca do vínculo entre ambas é *como* ele ocorre, mas jamais *se* ele ocorre.

Mas é com Friedman que alcançamos uma compreensão mais substancial da relação entre as características do espaço kantiano e sua concepção de matemática. A vantagem dessa interpretação é que ela não parte do argumento da geometria como foi estabelecido na Exposição Transcendental do Conceito de Espaço. Antes, ela busca o fundamento do vínculo ali mesmo onde Kant estabelece as características do próprio espaço. Nessa medida, parece que, como afirma Lebrun, a necessidade de estabelecer um espaço que seja a forma da sensibilidade humana é uma certeza eidética inextirpável, uma certeza exigida pela atividade do geômetra, uma certeza que garante a possibilidade da atividade matemática. Assim, é possível compreender o escândalo em que consistem as Antinomias, parece que é impossível invocar a unidade primitiva do espaço (a unidade intuitiva) sem antecipar o espaço sintetizado pelo entendimento. Esse emaranhado não chega a ser incoerente justamente pelo estatuto que a matemática possui no todo da teoria crítica.

Como vimos, a necessidade de que o espaço seja uma forma pura da sensibilidade é uma prerrogativa da filosofia transcendental. Mas a necessidade de que essa forma pura tenha a estrutura do espaço geométrico regido pelos axiomas da geometria euclidiana é uma necessidade que a filosofia transcendental quer nos fazer crer que pertence genuinamente à filosofia natural, ou á condição de possibilidade das ciências empíricas.

As dúvidas levantadas contra a certeza matemática passavam pelas questões que Kant elegeu como características do conhecimento matemático e, por conseguinte, como fundamentos de sua certeza apodítica. Como vimos no capítulo sobre o método matemático caracterizado como construção na intuição pura, ele encontrou fundamentos para discordar dos críticos anteriores e afirmar de forma cabal a excelência do exercício da razão que culmina no conhecimento matemático. As duas principais características explicitadas pela construção na intuição pura são a própria intuitividade necessária para o conhecimento considerado sintético, e o movimento que caracteriza o processo iterativo. Dessa forma, parece compreensível que Kant não tenha pretendido corrigir a axiomatização estabelecida por Euclides. Mas o fundamento para aquelas características, Kant não poderia encontrar na demonstração euclidiana. Questões aparentemente não resolvidas na axiomatização euclidiana como a continuidade e a divisibilidade infinita exigem o processo de construção porque os conceitos (em suas funções lógicas sob a perspectiva de uma lógica monádica) não permitem a compreensão do espaço como consistindo em um número infinito de partes.

É aqui que podemos perceber um deslocamento que confere toda relevância à compreensão kantiana da geometria. Para garantir não só a sinteticidade das proposições geométricas, mas explicar ao mesmo tempo a universalidade e a necessidade que as acompanham, Kant precisou estabelecer uma compreensão do espaço metafísico completamente diferente das compreensões correntes, a compreensão absolutista e a relativista do espaço, respectivamente relacionadas às compreensões newtoniana e leibnizianas. Para isso Kant qualifica o meio onde o processo construtivo deve ser estabelecido, de tal modo que, por ser determinado pelos axiomas da geometria euclidiana, não pode ter uma natureza conceitual.

REFERÊNCIAS DE IMMANUEL KANT.

KANT, I. *Lógica*. Tradução de Guido A. de Almeida. Tempo Brasileiro: Rio de Janeiro, 1992.

________. *Crítica da Razão Pura*. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5ª Ed. Fundação Calouste Gulbenkian: Lisboa. 2001.

________. *Metaphysical foundations of natural science*. Tradução de Michael Friedman. Cambridge University Press: Cambridge. 2002.

________. *Prolegomena to any future metaphysics that will be able to come forward as science.* Tradução de Gary Hatfield. Cambridge University Press: Cambridge. 2002.

REFERÊNCIAS

ALLISON, H & HEATH, P. (2002) (editores) *Immanuel Kant. Theoretical philosophy after 1781*. Cambridge University Press: New York.

BECK, L. W. (1969) *Early german philosophy*. Kant and his predecessors. The Belknap Press of Harvard University Press: Cambridge.

COLIVA, A. (2011) *Human diagrammatic reasoning and seeing-as*. Syntese. Publicação online.

CROWTHER, P. (2010) *The kantian aesthetic*. *From knowledge to the avant-garde*. Oxford University Press: New York.

DA SILVA, J. J. (2007) *Filosofias da matemática*. UNESP: São Paulo.

DICKER, G. (2004) *Kant's theory of knowledge*. An analytical introduction. Oxford University Press: New York.

DISALLE, R. (2006) *Understanding space-time.* The philosophical development of physics from Newton to Einstein. Cambridge University Press: New York.

FRANGIOTTI, M. A. (2005) "Limitações das doutrinas do espaço e do tempo em Kant"*.* In. HECK, J. & BORGES, M. de L. (org). *Kant: liberdade e natureza*. Editora da UFSC: Florianópolis.

FRIEDMAN, M. (1991) *Fundamentos de las teorias dels espacio-tiempo*. Tradução de Luis Bou. Alianza Editorial: Madri.

____________(1992) *Kant and exact sciences*. Harvard University Press: Cambridge.

____________(2002) *Kant, kuhn, and the rationality of science*. Philosophy of Science, 69.

____________(2012)*Geometria e intuição espacial em Kant*. Kant e-Prints. Série 2, v. 7, n. 1, p. 02-32, número especial, jan.-jun.,

GUYER, P. (Ed.) (2006) *The Cambridge companion to Kant and modern philosophy*. Cambridge University Press: New York. 54

HATFIELD, G. (2006) "Kant on the perception of space"*.* In. GUYER, Paul. (Ed.) *The Cambridge companion to Kant and modern philosophy*. Cambridge University Press: New York.

HEATH, T. L. (trad)(1968) The thirteen books of Euclid's Elements. Vol.1. University:Cambridge.

HINTIKKA, J. "Kant on the mathematical method". In. POSY, C. J. (ed.) *Kant's philosophy of mathematics: Modern essays*. 1992.

HYSLOP, J. H. (1898) *Kant's doctrine of time and space*. Mind, New Series, Vol. 7, No. 25

KITCHER, P. (1975) *Kant and the foundations of mathematics*. The Philosophical Review, Vol. 84, No. 1.

LAND, J. P. N. (1877) *Kant's space and modern mathematics*. Mind, Vol. 2, No. 5

LEBRUN, G. (1993) *Kant e o fim da metafísica.* Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. Martins Fontes: São Paulo.

LORENZO, J. de. (1992) *Kant y la matemática: el uso constructivo de la razón pura*. Editora Tecnos: Madrid.

MANCOSU, P. (1996) *Philosophy of mathematics and mathematical pratice in the seventeenth century*. Oxford University Press: New York.

MELNICK, A. (1992) "The geometry of a forma of intuition". In. POSY, Carl J. (ed) *Kant's philosophy of mathematics. Modern essays*. Kluwer Academic Publishers: U.S.A.

PARSONS, C. (1992) "Kant's philosophy of arithmetic". In. POSY, C. J. (ed.) *Kant's philosophy of mathematics: Modern essays*. Kluwer Academic Publishers: U.S.A.

PICHÉ, C. (2004) *Kant, heredero del método fenomenológico de Lambert*. ÉNDOXA: Series Filosóficas, nº 18. UNED: Madrid.

POSY, C. J. (ed) (1992) *Kant's philosophy of mathematics.* Modern essays. Kluwer Academic Publishers: U.S.A.

POTTER, M. *Reason's nearest kin***.** *Philosophies of arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford University Press: New York. 2000.

SHABEL, L. (1998) *Kant on the 'symbolic construction' of mathematical concepts*. Studies in history and philosophy of science. Vol 29. nº4.

___________(2006) "Kant's philosophy of mathematics". In. GUYER, Paul. (Ed.) *The Cambridge companion to Kant and modern philosophy*. Cambridge University Press: New York. 55

___________(1996) *Kant´s argument from geometry*. Journal of the History of Philosophy, Volume 42, Number 2, April 2004, pp. 195-215

TILES, M. (2009) "A kantian perspective on the philosophy of mathematics". In. DOV M. GABBAY, P. T. & WOODS, J. *Handbook of the philosophy of science: philosophy of mathematics*. (Ed Vol.) Andrew D. Irvine. North Holland.

TORRES, J. C.B. (2004) "Intuições e conceitos: a diferença de forma". In. *Transcendentalismo e Dialética*. L&PM: Porto Alegre.

WARREN, D. (1998) *Kant and the apriority of space*. The Philosophical Review, Vol. 107, No. 2.